



Oeffentlicher
Schulpreis.

Math. P. 742 u - 1/2

Preis

aus

dem allgemeinen Fortgang
und der Mathematik

zuverkannt

dem Schüler der III. Klasse
des Gymnasiums
Gustav Kahr.

Ansbach, den 29. August 1850.
Königlich-Bayerisches Studienrectorat:
S. Pfleger.

Lehrbuch

2. Ge

(Math. P.)

der

Geometrie und Trigonometrie

nebst ihren ausgedehnten Anwendungen

auf die

Lösung geometrischer Probleme.

Vorzüglich

für

Militär- und technische Lehranstalten

von

B. Unruh.

Doctor der Philosophie und königlich bayerischer wirklicher Professor
der Mathematik im königlichen Cadetten-Corps zu München.

Dritte verbesserte und vermehrte Auflage,

herausgegeben in drei Theilen

von

C. KUHN,

k. Professor der Mathematik und Physik im k. b. Cadetten-Corps und
ordentliches Mitglied der physikalischen Gesellschaft zu Berlin.

Mit fünf Steindrucktafeln.

LANDSHUT.

Verlag von J. G. Wölffe,

Krüll'sche Universitäts-Buchhandlung.

1850.

Druck von J. F. Rietsch in Landshut.

Gd/66/2026

Lehrbuch

der

Geometrie und Trigonometrie

nebst ihren ausgedehnten Anwendungen

von

Dreifach ist des Raumes Maas.

Rastlos fort ohn' Unterlass

Strebt die Länge fort in's Weite;

Endlos giesset sich die Breite;

Grundlos senkt die Tiefe sich.

Dir ein Bild sind sie gegeben,

Rastlos vorwärts musst du streben,

Nie ermüdet stille steh'n,

Willst du die Vollendung seh'n,

Musst in's Breite dich entfalten,

Soll sich dir die Welt gestalten,

In die Tiefe musst du steigen,

Soll sich dir das Wesen zeigen.

Nur Beharrung führt zum Ziel,

Nur die Fülle führt zur Klarheit

Und im Abgrund wohnt die Wahrheit.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Verlag von J. G. Wöhlke

Königl. Preuss. Universitäts-Buchhandlung

1850.

Druck von J. F. Neumann in Landshut.

Lehrbuch

der

Geometrie und Trigonometrie

nebst ihren ausgedehnten Anwendungen

auf die

Lösung geometrischer Probleme.

Vorzüglich

für

Militär- und technische Lehranstalten

von

R. Unruh.

Doctor der Philosophie und königlich bayerischer wirklicher Professor
der Mathematik im königlichen Cadetten-Corps zu München.

Dritte verbesserte und vermehrte Auflage,

herausgegeben in drei Theilen

von

C. KUHN,

k. Professor der Mathematik und Physik im k. b. Cadetten-Corps und
ordentliches Mitglied der physikalischen Gesellschaft zu Berlin.

Erster und zweiter Theil.

LANDSHUT.

Verlag von J. G. Wölffe,

Krüll'sche Universitäts-Buchhandlung.

1850.

Druck von J. F. Rietsch in Landshut.

Lehrbuch

der

Geometrie und Trigonometrie

nebst ihren ausgedehnten Anwendungen

auf die

Lösung geometrischer Probleme.

Vorzüglich

für

Militär- und technische Lehranstalten

von

Dr. K. Kuhn.

Doktor der Philosophie und königlich bayerischer wirklicher Professor
der Mathematik im königlichen Cadetten-Corps zu München.

Dritte verbesserte und vermehrte Auflage.

herausgegeben in drei Theilen

von

C. Kuhn.

K. Professor der Mathematik und Physik im K. R. Cadetten-Corps und
ordentliches Mitglied der physikalischen Gesellschaft zu Berlin.

Erster und zweiter Theil.

LEIPZIG.

Verlag von J. G. Wölfl.

Königl. Universitäts-Buchhandlung.

1850.

Druck von J. F. Richter in Landshut.

E i n l e i t u n g.

§. 1.

Erklärungen. Eine Grösse heisst **stetig** (*quantum continuum*), wenn ihre Theile so zusammenhängen, dass das Ende des einen unmittelbar der Anfang des anderen ist. Man unterscheidet **zeitlich-stetige** und **räumlich-stetige** Grössen, je nachdem die Stetigkeit in Bezug auf die Zeit oder auf den Raum betrachtet wird.

Die Wissenschaft der räumlich-stetigen oder der ausgedehnten Grössen heisst **Geometrie**.

Der Raum ist unendlich, und hat eine dreifache Ausdehnung (*dimensio*), nämlich **Länge**, **Breite** und **Höhe**.

Die Ausdehnung nach Länge heisst eine **geometrische Linie**, die nach Länge und Breite eine **geometrische Fläche**, und die Ausdehnung nach Länge, Breite und Höhe ein **geometrischer Körper**.

Das Aeusserste eines Dinges heisst seine **Grenze**. Die Grenze des Körpers ist eine **Fläche**, die der Fläche eine **Linie**, und die der Linie ein **Punkt**, oder ein Ort im Räume ohne alle Ausdehnung.

Wenn hier von einem Körper, vielmehr vom körperlichen Raume die Rede ist, so hat man sich das Raumerfüllende, die Materie nämlich, ganz und gar hinwegzudenken, und nur dasjenige sich vorzustellen, was von irgend einer Materie erfüllt werden könnte.

Ebenso ist es auch bei einer Fläche und einer Linie.

Wenn wir an der Grenze eines Körpers von aller Materie, welche hier ausgebreitet sein könnte, abstrahiren, so erhalten wir die Vorstellung von einer Fläche.

Denken wir uns ferner bloss den Raum, welcher beim Zusammenstossen zweier Grenzen eines und desselben Körpers wahrnehmbar wird, und nehmen dabei auf die dort ausgebreitete Materie keine Rücksicht, so erhalten wir eine Vorstellung von der Linie.

§. 2.

Erklärung. Eine Linie entsteht durch die Bewegung eines Punktes, wenn man die Spuren der Bewegung im Raume, als bezeichnet, vorstellt. Ebenso bildet die Spur der Bewegung einer Linie die Fläche, und die der Bewegung einer Fläche einen Körper. Die Theile einer Linie sind Linien, die der Fläche Flächen, und die der Körper ebenfalls Körper.

§. 3.

Erklärung. Linien, Flächen und Körper sind als räumlich stetige Grössen, der Gegenstand der Geometrie. Diese bestimmt deren Lage, Grösse und deren gegenseitige Verhältnisse.

In der elementaren Geometrie, von der im Folgenden auch nur die Rede ist, werden bloss die einfachsten geometrischen Grössen in Betracht gezogen.

So kann die Bewegung eines Punktes, von der im

§. 2 die Rede war, auf unendlich viele verschiedene Arten vor sich gehen, und es entstehen dabei auch eben so viele verschiedene Linien, die manche Eigenschaften gemein haben, in manchen anderen aber wieder sich unterscheiden können. — Hier ist aber nur von einigen dieser Linien die Rede. — Ganz dasselbe haben wir für eine Fläche und für einen von Flächen begränzten Raum, den körperlichen Raum nämlich, zu bemerken.

I. T h e i l.

Ebene Geometrie.

I. Abschnitt.

Von Linien und Winkeln überhaupt.

§. 4.

Erklärung. Die einfachste aller Linien ist die **gerade Linie**.

Eine gerade Linie (*linea recta*) ist diejenige, welche zwischen den auf ihr befindlichen Punkten gleichförmig liegt.

Bei einer geraden Linie liegen also alle Punkte in einer und derselben Richtung.

Jede Linie, die nicht gerade und nicht aus geraden Linien zusammengesetzt ist, heisst **krumm** (*curva*). (Fig. 1.) So ist z. B. die Linie AB gerade, und die Linie ACDB krumm.

Bei einer stetigen krummen Linie liegen höch-

stens zwei, nicht aber mehr unmittelbar auf einander folgende Punkte in einer und derselben Richtung. Hingegen haben aber alle Theile einer und derselben krummen Linie dieselben geometrischen Eigenschaften, mögen sie von gleicher oder verschiedener Länge sein.

Ueberdiess gibt es auch gerade- und krummgebrochene. Erstere bestehen aus mehreren geraden Linien, die in verschiedenen Richtungen liegen, und letztere aus mehreren krummen, wie AEFB und ACDB.

§. 5.

Grundsatz (a). Von einem Punkte A (Fig. 1) zu

(a) Es mag hier gelegentlich bemerkt werden, dass die Geometrie, wie jede andere exacte Wissenschaft, die Erklärungen und Grundsätze als ihre Grundlagen hat.

Die Erklärung soll jene Merkmale einer geometrischen Grösse angeben, welche sie mit Grössen ihrer Art gemein hat, und wodurch sie sich von anderen Grössen unterscheidet.

Ein Grundsatz ist hier jede durch die Natur der Sache selbst begründete Wahrheit, also eine für sich schon klare Behauptung, die keines Beweises bedarf. So sind folgende Sätze als Grundsätze anzusehen:

1. Sind zwei Grössen einer und derselben dritten Grösse in einer bestimmten Beziehung gleich, so müssen sie in derselben Beziehung auch unter sich gleich sein. (Haben z. B. zwei Grössen einerlei Mass, so sind sie auch gleich gross.)

2. Gleiches um Gleiches vermehrt oder vermindert, gibt wieder Gleiches.

3. Gleiches mit derselben Zahl multipliziert oder dividirt gibt wieder Gleiches.

4. Ein Theil einer Grösse muss kleiner als diese selbst sein etc.

Solche Behauptungen, durch welche von einer Grösse neue Eigenschaften dargelegt werden, die nicht unmittelbar durch

einem anderen B gibt es nur eine gerade Linie; krumme und gebrochene aber unendlich viele. Die gerade Linie ist darunter die kürzeste.

I. Zusatz. Durch zwei Punkte ist die Lage, und durch die Endpunkte auch noch die Grösse einer geraden Linie bestimmt.

Eine Gerade, welche von irgend einem Punkte nach einem anderen gezogen werden kann, nennt man daher auch die Entfernung dieser beiden Punkte.

II. Zusatz. Zwei gerade Linien schneiden [sich nur in einem Punkte.

III. Zusatz. Gerade Linien, die gleiche Länge haben, sind congruent (b).

§. 6.

Erklärung. Eine Fläche heisst eben (*superficies plana*), oder eine Ebene (*planum*), wenn jede gerade Linie, die man von irgend einem Punkte derselben, zu irgend einem anderen in ihr, zieht, ganz in der Fläche liegt.

Nimmt man also in einer solchen Fläche eine Gerade von beliebiger Länge an, und denkt sich dieselbe auf der Fläche so fortbewegt, dass stets zwei Punkte derselben in dieser liegen bleiben, so werden auch

die von dieser Grösse gegebenen Merkmale umfasst worden sind, nennt man Lehrsätze. Die Lehrsätze bedürfen also eines Beweises, bei dessen Darlegung alle schon bekannten Eigenschaften und Grundsätze zu Hülfe genommen werden dürfen.

(b) Bei stetigen Grössen findet man die Congruenz, d. i. Uebereinstimmung in Grösse und Form, (in Quantität und Qualität,) wenn sie, auf einander gelegt, mit allen ihren Theilen zusammenfallen. Man sagt dann, sie decken sich (congruent.)

alle Theile der Geraden mit der Fläche zusammenfallen, man mag sich beide so weit ausgedehnt denken, als man will. —

Ist kein Theil der Fläche eben, so heisst sie krumm.

§. 7.

Postulat. Man kann zwischen irgend zwei Punkten eine gerade Linie ziehen, oder als gezogen denken. Eben so lässt sich jede gerade Linie beliebig rückwärts oder vorwärts verlängern, und jede Ebene beliebig im Raume erweitern.

§. 8.

Erklärung. Die Neigung oder Abweichung zweier Linien AB und BC (Fig. 2), die einen Punkt B gemein haben, heisst ein Winkel (angulus) (c). Die Linien AB und BC heissen seine Schenkel (crura), der Punkt B sein Scheitel (vertex). Man bezeichnet einen Winkel entweder durch einen kleinen, zwischen die Schenkel gesetzten, Buchstaben, oder durch die drei Buchstaben an den Schenkeln, so dass man den am Scheitel stehenden in die Mitte setzt. So heisst z. B. Fig. 2. der Winkel entweder x oder ABC, auch CBA, oder auch B.

I. Zusatz. Die Grösse eines Winkels, d. h. die Neigung seiner Schenkel, bleibt unverändert, man mag diese wie immer verlängern oder abkürzen.

II. Zusatz. Gleich grosse Winkel decken sich, wenn sie auf einander gelegt werden; sind also congruent.

§. 9.

Erklärungen. a) Zwei Winkel x und y (Fig. 3), die einen gemeinschaftlichen Schenkel AD haben, und

(c) Hier ist nur von geradlinigen Winkeln die Rede.

deren beide andere Schenkel BD und DC in eine Verlängerung fallen, heissen Nebenwinkel (*anguli contigui vel deinceps positi*)

b) Wenn eine gerade Linie AB (Fig. 4) auf einer anderen CD so aufsteht, dass sie sich weder auf die eine Seite, gegen D, noch auf die andere, gegen C. mehr neigt, so heisst jeder dieser gleichen Winkel ABC und ABD ein rechter (*rectus*), und man sagt, die Linie AB steht senkrecht oder perpendikulär auf CD und umgekehrt.

c) Ein Winkel heisst spitz (*acutus*), wenn seine Schenkel eine kleinere Neigung oder Abweichung gegen einander haben, als die eines rechten, z. B. y (Fig. 3); im Gegentheile ist der Winkel stumpf (*obtusus*), wie z. B. x. Spitze und stumpfe Winkel heissen auch schiefe (*obliqui*). Fallen die Schenkel eines Winkels in eine gerade Linie, so heisst der Winkel ein gerader, z. B. BDC (Fig. 3). Nähern sich die Schenkel eines Winkels mehr gegen einander, als die eines geraden, so heisst der Winkel hohl (*concavus*), im Gegentheile erhaben (*convexus*). In Fig. 5. ist ABC nach oben betrachtet hohl, nach unten aber erhaben.

I. Zusatz. In einem Punkte einer und derselben Geraden kann man auf diese nur zwei gleiche Winkel sich denken, die einen gemeinschaftlichen Schenkel haben (d).

Ist nämlich (Fig. 4.) $ABC = ABD$, so kann in keinem Falle irgend eine zweite Gerade BE gegen BC dieselbe

(d) Bei diesen und allen folgenden Betrachtungen ist angenommen, dass die sämtlichen Geraden und Punkte, von denen die Rede ist, in einer und derselben Ebene liegen.

Neigung haben, wie gegen BD, ohne mit BA zusammenzufallen; folglich kann auch EBD nicht gleich EBC sein. Dasselbe gilt auch von jeder anderen Geraden, die durch B geht, und nicht mit BA zusammenfällt.

II. Zusatz. Jeder von zwei gleichen Nebenwinkeln ist ein rechter. (Erkl. b.)

III. Zusatz. Alle rechte Winkel sind congruent.

Denn denkt man sich zwei gleiche Nebenwinkel so an zwei andere gelegt, dass ihre Scheitel sowohl, als auch die in einer Geraden liegenden zwei Schenkel in einander fallen, so muss auch der gemeinschaftliche Schenkel der ersten beiden, mit jenem der beiden anderen Nebenwinkel zusammenfallen (nach Zusatz I.)

IV. Zusatz. Jeder gerade Winkel ist zwei rechten gleich, oder Fig. 4. $CBD = 2 R$ (Erkl. b. und c); denn es ist, da AB auf CD senkrecht steht, $CBD = CBA + ABD = R + R = 2 R$. (Erkl. b.)

V. Zusatz. Da alle rechten Winkel einander gleich sind, so kann man dieselben als Masseinheit für einen jeden anderen Winkel benützen, und daher jeden Winkel als bestimmten Theil oder als bestimmtes Vielfaches des rechten Winkels angeben, je nachdem derselbe kleiner oder grösser als ein Rechter ist. —

Die Grösse des rechten Winkels soll in der Folge immer mit R bezeichnet werden. —

§. 10.

Lehrsatz. Die Summe zweier Nebenwinkel ist $= 2 R$, d. i. $x + y = 2 R$. (Fig. 3); denn es ist

$$x + y = BDC$$

$$\text{und } BDC = 2 R \text{ (Zusatz IV. des §. 9.)}$$

$$\text{Mithin } x + y = 2 R.$$

1. Zusatz. Alle Winkel um einen Punkt auf einer Seite einer geraden Linie sind zusammen $= 2 R$, d. i. (Fig. 6) $x + y + z = 2 R$; denn es ist

$$\begin{aligned} x + y + z &= ABC \text{ und} \\ ABC &= 2 R \text{ (Zus. IV. des §. 9.).} \end{aligned}$$

Mithin $x + y + z = 2 R$.

II. Zusatz. Alle Winkel rings um einen Punkt sind zusammen $= 4 R$, d. i. (Fig. 7) $ACB + ACD + DCB = 4 R$; denn verlängert man DC über C, so ist

$$\left. \begin{aligned} ACE + ACD &= 2 R \\ ECB + DCB &= 2 R \end{aligned} \right\}$$

folglich $ACE + ECB + ACD + DCB = 4 R$.

Es ist aber $ACE + ECB = ACB$, mithin auch

$$ACB + ACD + DCB = 4 R.$$

III. Zusatz. Wenn zwei oder mehrere aneinander liegende Winkel, die einen gemeinschaftlichen Schenkel und Scheitel haben, z. B. BDC und CDA (Fig. 8), in ihrer Summe $2 R$ ausmachen, so fallen ihre äussersten Schenkel BE und AD in eine gerade Linie. Denn wäre ADB keine gerade Linie, so verlängere man BD z. B. nach F, und FDB sei die gerade Linie; dann ist

$$\begin{aligned} BDC + CDA &= 2 R \text{ (verm. Voraussetzung)} \\ \text{und } BDC + CDF &= 2 R \text{ (§. 10.)} \end{aligned}$$

Mithin wäre $BDC + CDA = BDC + CDF$ und

$CDA = CDF$, welches unmöglich ist, da der Theil dem Ganzen nie gleich sein kann.

Ebenso ist es, wenn die Verlängerung von BD als durch G gehend angenommen würde.

Es muss daher ADB die gerade Linie sein.

IV. Zusatz. Ist von zwei Nebenwinkeln einer $= R$, so muss auch der andere ein rechter Winkel sein.

§. 11.

Erklärungen. a) Der Winkel, der einen anderen zu einem rechten ergänzt, heisst sein Complement; ergänzt er ihn aber zu $2 R$, so heisst er sein Supplement. Z. B. (Fig 9) ist x das Complement von y , und umgekehrt, wenn $x + y = ABC = R$ ist; und (Fig. 3) x das Supplement von y , oder umgekehrt y das Supplement von x , wenn $x + y = ADB + ADC = 2 R$ ist.

b) Scheitel- oder Vertikal-Winkel (anguli verticales) sind jene zwei Winkel, die einen gemeinschaftlichen Scheitel E (Fig. 10) haben, und wo die Schenkel des einen Winkels die verlängerten Schenkel des andern sind, z. B. o und n , oder x und y .

§. 12.

Lehrsatz. Alle Scheitelwinkel sind gleich, d. i. $o = n$, denn es ist

$$\left. \begin{array}{l} o + y = 2 R \\ n + y = 2 R \end{array} \right\} \text{ §. 10.)}$$

folglich $o + y = n + y$ und

$$o = n$$

Auf dieselbe Art lässt sich darthun, dass $x = y$ ist.

II. Abschnitt.

Von den ebenen Figuren überhaupt, dann von den Eigenschaften der Dreiecke und den dabei vorkommenden Linien und Winkel.

§. 14.

Erklärungen. Eine von allen Seiten begrenzte ebene Fläche heisst eine ebene Figur. Die begrenzenden Linien heissen ihre Seiten. Die ganze Grenze der Figur, nämlich die Summe der Längen ihrer Seiten, wird ihr Umfang oder Perimeter genannt. (Fig. 11.)

Man nennt die Figur nach Beschaffenheit ihrer Seiten gerad-, krumm-, gemischtlinige.

Eine gerade Linie, die in der Figur von einer Ecke zu einer anderen gezogen ist, heisst Diagonale. So ist z. B. in der geradlinigen Figur ABCDE die Linie AC eine Diagonale.

I. Zusatz. Eine geradlinige Figur hat so viele Ecken oder Winkel, als sie Seiten hat. Denn die erste Seite bildet mit der zweiten Seite einen Winkel, ebenso die zweite mit der dritten den zweiten Winkel.

In einer geradlinigen Figur kann man ferner von einem jeden Ecke so aus viele Diagonalen ziehen, als die Anzahl der Seiten weniger 3 beträgt.

II. Zusatz. Es gibt keine geradlinige Figur von zwei Seiten.

III. Zusatz. (Fig. 12.) Wenn ein Punkt A innerhalb des Umfanges einer Figur und ein anderer B ausserhalb desselben liegt, und man verbindet diese beiden Punkte durch eine gerade Linie AB, so muss diese den Umfang der Figur wenigstens in einem Punkte C schneiden. Verlängert man diese Linie auch rückwärts über A, so muss es noch einen zweiten Durchschnittspunkt D geben.

IV. Zusatz. (Fig. 13.) Wenn ein Punkt A des Umfanges einer Figur innerhalb und ein zweiter B ausserhalb des Umfanges einer andern Figur liegt, so schneiden sich die Perimeter dieser Figuren wenigstens in 2 Punkten C und D.

§. 14.

Erklärungen. a) Die geradlinigen Figuren heissen nach der Anzahl ihrer Seiten Dreiecke (triangula), Vierecke (tetragona), Fünfecke etc. Hat eine Figur mehr als 4 Seiten, so heisst sie im Allgemeinen Vieleck (Polygonum).

b) Sind bei einer Figur alle Seiten und Winkel gleich, so heisst sie regulär, im Gegentheile irregulär.

c) Hat ein Dreieck alle 3 Seiten gleich, so nennt man es gleichseitig (aequilaterum) (Fig. 14), hat es nur zwei Seiten gleich, gleichschenkelig (aequicrum) (Fig. 15). Die beiden gleichen Seiten heissen Schenkel, die dritte Seite ist die Grundlinie, und die der Grundlinie gegenüberstehende Ecke die Spitze des Dreieckes. Sind in einem Dreiecke alle Seiten un-

gleich, so heisst es ungleichseitig (scalenum) (Fig. 16.). Man bezeichnet die Dreiecke mit den drei an ihren Ecken stehenden Buchstaben, welchen man das Zeichen $\triangle$ vorsetzt. Z. B. $\triangle ABC$.

§. 15.

Erklärungen. (Fig. 17.) a) Bewegt sich eine begrenzte gerade Linie AB um einen ihrer Endpunkte A so lange, bis sie wieder in ihre vorige Lage kömmt, so entsteht eine Kreisfläche oder ein Kreis (circulus). Der Punkt A heisst Mittelpunkt (centrum), und die Linie AB der Halbmesser (Radius) des Kreises. Die krumme Linie, die der Punkt B beschreibt, heisst Peripherie oder Umkreis (circumferentia), ein Theil davon ein Bogen (arcus). Jede gerade Linie, z. B. DE, die von einem Punkte der Peripherie bis zu einem anderen derselben gezogen wird, heisst Sehne (chorda). Geht die Sehne durch den Mittelpunkt, so nennt man sie Durchmesser (diameter). Jene gerade Linie, welche mit der Peripherie nur einen Punkt gemein hat, übrigens, wie immer verlängert, ganz ausserhalb des Kreises liegt, heisst Tangente, jener Punkt der Berührungspunkt der letzteren, z. B. FH sei eine Tangente und F ihr Berührungspunkt; eine über den Kreis hinaus verlängerte Sehne eine Secante, z. B. DI.

b) Ein Kreisabschnitt (segmentum) ist ein Theil des Kreises, der durch eine Sehne und einen Bogen begrenzt wird, wie z. B. (Fig. 17.) DGE.

c) Ein Kreisausschnitt (sector) ist ein Theil des Kreises, der durch 2 Radien und den dazwischen liegenden Bogen begrenzt wird, z. B. ABC.

d) Zwei Kreise, die einerlei Mittelpunkt haben, heissen **concentrisch** (Fig. 18). Haben die Kreise verschiedene Mittelpunkte, so sind sie **excentrisch**. Die gerade Linie zwischen den Mittelpunkten zweier Kreise heisst **Centrallinie**.

I. Zusatz. Alle Radien desselben Kreises sind gleich gross, und der Diameter ist zwei Radien gleich.

II. Zusatz. Alle Kreise, deren Radien oder Durchmesser gleich gross sind, sind **congruent**, denn sie decken sich, auf einander gelegt, vollkommen.

III. Zusatz. Alle congruenten Kreise haben gleiche Radien oder Durchmesser und gleiche Peripherien.

IV. Zusatz. Der Diameter theilt jeden Kreis, so wie seine Peripherie, in zwei congruente Theile. Denn man lege (Fig 19.) den Theil ABC so auf ADC, dass A auf A und E auf E zu liegen kömmt, dann muss C in C fallen. Es müssen aber auch alle Theile von ABC genau auf ADC liegen; denn gesetzt, ein Punkt von ABC fiele ausserhalb ADC, so gehörte zu ihm ein grösserer und gesetzt, er fiele innerhalb, ein kleinerer Radius; gegen Zus. I.

V. Zusatz. Eine gerade Linie schneidet den Kreis in 2 Punkten. (§. 13. Zus. III.)

§. 16.

Postulat. Aus jedem Punkte kann man mit jedem Radius einen Kreis beschreiben.

§. 17.

Lehrsatz. In jedem Dreiecke ist die Summe je zweier Seiten grösser als die dritte.

Beweis. Betrachtet man (Fig. 14) im $\triangle ABC$

die gerade Linie AB, so ist sie als solche die kürzeste zwischen A und B (§. 5.). Die gebrochene Linie ACB muss daher länger sein als die gerade AB (§. 5.); daher $AB < AC + CB$. Eben so ist auch $AC < AB + BC$ und $BC < AC + AB$.

I. Zusatz. Sind drei ungleich lange Gerade gegeben, so kann man aus denselben immer ein Dreieck construiren, wenn je zwei derselben in Summe grösser sind, als die dritte.

II. Zusatz. Zwei Kreise schneiden sich nur dann, wenn von den drei Linien: Centrallinie und den beiden Radien, immer zwei zusammen genommen, grösser als die dritte sind. Denn sollen sich z. B. zwei Kreise (Fig. 21) in A schneiden, so müssen die Halbmesser BA und AC beider Kreise und Centrallinie BC ein Dreieck BAC bilden, dessen Eck A beiden Kreisen gemein ist, und dieses kann (I. Zus. §. 17.) nur dann statt haben, wenn $AB + AC > BC$ etc. ist.

§. 18.

Aufgabe. (Fig. 20.). Ueber eine gegebene gerade Linie AB ein gleichseitiges Dreieck zu construiren.

Auflösung. Man beschreibe aus A und B mit den Radien AB und BA Kreise [§. 16.], und ziehe nach ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt C die geraden Linien AC und CB, so ist das $\triangle ABC$ das verlangte.

Beweis.

Es ist $AC = AB$
und $CB = AB$ [§. 15. Zus. I.]

Mithin $AC = CB = AB$ d. i. das Dreieck gleichseitig. [§. 14. c.]

Es ist nur noch zu zeigen, dass obige 2 Kreise in C einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben. Man verlängere daher AB bis D, so, dass $BD = AB$ ist (§. 7.), so geht der Kreis um B durch D, einen Punkt ausserhalb des Kreises um A, weil $AD = 2 AB$ ist, und auch durch A, einen Punkt innerhalb desselben, folglich schneidet er den anderen Kreis [§. 13. Zus. IV.], was übrigens schon aus §. 18. Zus. II, hervorgeht. —

§. 19.

Aufgabe. Aus drei gegebenen Linien, m, n und o (Fig. 21.), wovon immer zwei zusammen grösser sind als die dritte, ein Dreieck zu construiren.

Auflösung. Man ziehe eine Linie $BC = o$, und beschreibe aus B mit dem Radius m, und aus C mit dem Radius n, Kreise, so werden sich diese (§. 13. Zus. IV. und §. 17. Zus. II.) in A schneiden. Zieht man AB und AC, so ist das $\triangle ABC$ das verlangte.

Beweis. Der Construction gemäss ist

$$AB = m$$

$$AC = n$$

und $BC = o$ das heisst die drei gegebenen Linien sind Seiten des Dreieckes.

Auf dieselbe Art lässt sich ein gleichschenkliges $\triangle$ construiren, wenn 2 Seiten (d. i. ein Schenkel und die Grundlinie) gegeben sind. Jedoch müssen die zwei Schenkel zusammen grösser als die Grundlinie sein (§. 17).

§. 20.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn

sie zwei Seiten und den davor eingeschlossenen Winkel gegenseitig gleich haben.

Beweis. (Fig. 22,) Es ist darzuthun, dass unter den Bedingungen $AB = ab$, $AC = ac$ und $BAC = bac$, die beiden Dreiecke ABC und abc vollkommen einerlei, d. i. congruent sind. (§. 5. Anmkg.)

Man lege das $\triangle abc$ so auf das Dreieck ABC , dass a auf A und ab auf AB zu liegen kömmt, so fällt b auf B , indem $AB = ab$ ist (§. 5. Zus. III.), und ac in die Richtung von AC , weil $BAC = bac$ ist (§. 8. Zus. II.) endlich auch c auf C , indem $AC = ac$ ist (§. 5. Zus. III.). Es fällt also auch bc mit BC (§. 5) und abc mit ABC , so wie auch acb mit ACB , folglich auch der Dreiecke ganze Fläche zusammen. Mithin ist $\triangle ABC \cong \triangle abc$.

I. Zusatz. Zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bestimmen ein Dreieck vollkommen.

Alle Dreiecke also, welche aus zwei gegebenen Geraden so construirt werden, dass, diese einen gegebenen Winkel einschliessen, sind unter sich in keinerlei Beziehung von einander verschieden.

II. Zusatz. In congruenten Dreiecken stehen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber und umgekehrt; oder die gleichliegenden Seiten und Winkel sind gleich.

III. Zusatz. Ist, in dem $\triangle ABC$, $AB = AC$ und im $\triangle abc$, $ab = ac = AB$ (Fig. 22), d. h. sind beide Dreiecke gleichschenkelig, so kann man, wenn auch $BAC = bac$ ist, das $\triangle abc$ ausser der vorigen Lage (im Beweise des Lehrsatzes) auch noch so auf das $\triangle ABC$ legen, dass a auf A , aber ab auf AC fällt; dann muss ac längst AB , so wie auch b auf C , und c auf B fallen,

indem $ab = AC$ und $ac = AB$ ist. Beide Dreiecke decken sich auch in dieser Lage (Lehrs.), und es ist

$abc = ACB$; aber gemäss des Lehrsatzes auch
 $abc = ABC$

folglich $ACB = ABC$ d. h.

IV. Zusatz. In jedem gleichschenkligen Dreiecke ABC sind die Winkel an der Grundlinie gleich. Denn man kann sich eben dieses Dreieck noch einmal vorstellen (als $\triangle abc$), und wie im vorigen Zusatze verfahren.

V. Zusatz. In jedem gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel gleich; denn es ist auch gleichschenklig, man mag was immer für eine Seite als Grundlinie annehmen (Zus. IV.). Das gleichseitige Dreieck ist eine reguläre Figur (§. 14. b.).

§. 21.

Lehrsatz. (Fig. 23.) Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel gleich sind, so ist es gleichschenklig, d. i. die beiden, den gleichen Winkeln entgegenstehenden Seiten sind gleich.

Beweis.

(e) Thesis. $AB = AC$

(e) Daten. $ACB = ABC$

(e) Thesis (oder Th.) bedeutet den zu beweisenden Satz, Daten (oder Dat., auch D.), aber die gegebenen Bedingungen des Lehrsatzes und die Eigenschaften, die in der Figur sich finden, oder durch Construction zum Behufe des Beweises hineingelegt werden. Der Deutlichkeit und genauen Uebersicht wegen ist es nöthig, Th. und D. bei jedem Lehrsatze auszuscheiden und anzusetzen.

Kann man zeigen, dass AB unter diesen Bedingungen weder grösser noch kleiner als AC ist, so ist der Lehrsatz bewiesen (f).

Wäre $AB > AC$, so schneide man von AC ein Stück $BD = AC$ ab, und ziehe DC, so müsste,
da $BC = BC$.

$$BD = AC$$

$$\angle DBC = \angle ACB \text{ (verm. Daten.) ist,}$$

auch $\triangle BDC \cong \triangle ABC$ (§. 20.) sein, welches unmöglich ist, da ein Theil dem Ganzen nie gleich sein kann.

Auf einen gleichen Widerspruch stösst man durch dasselbe Verfahren, wenn man $AB < AC$ annimmt. Da es nun unmöglich ist, dass $AB >$ oder $<$ AC ist, so muss $AB = AC$ sein.

Zusatz. Ein Dreieck, welches dreigleiche Winkel hat, ist gleichseitig.

Anmerkung. Alle in §. 20. enthaltenen Zusätze sowie der in §. 21. enthaltene Lehrsatz mit seinen Zusätzen sind, wie man leicht aus dem Ganzen ersieht, als unmittelbare oder mittelbare Folgerungen des ersten Lehrsatzes der Congruenz der Dreiecke zu betrachten.

§. 22

Lehrsatz. (Fig. 24.) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen jede Seite des einen einer Seite des anderen gleich ist.

(f) Man nennt diese Beweisart indirekt, indem man die Wahrheit des Satzes dadurch darthut, dass man zeigt, das Gegentheil desselben sei unmöglich, weil daraus sich Folgerungen ergeben, die anerkannten Wahrheiten geradezu widersprechen.

Beweis.

Thes. $\triangle ABC \cong \triangle abc$

Daten $AB = ab, BC = bc, AC = ac$

Wüsste man, dass $BAC = bac$ ist, so wären beide Dreiecke nach §. 20. congruent. Diess lässt sich aber dathun, nämlich:

Man lege das $\triangle abc$ an das $\triangle ABC$, so, dass b in B und bc auf BC fällt, das Dreieck abc aber die entgegengesetzte Lage vom $\triangle ABC$ erhält. Das dahin gelegte Dreieck abc werde durch das $\triangle BCD$ vorgestellt. Man ziehe AD , so ist

$AB = ab = BD$ folgl. $\angle o = n$ (§. 20. Zus. IV.) eben so
 $AC = ac = DC$, „ $\angle x = m$ (§. 20. Zus. IV.)

Mithin $\angle o + x = n + m$ oder

$BAC = BDC$

also $BAC = bac$.

Da nun die Dreiecke ABC und abc nebst diesen Winkeln auch die einschliessenden Seiten gleich haben, so sind sie nach §. 20. congruent.

I. Zusatz. Durch die 3 Seiten eines Dreieckes ist dasselbe vollkommen bestimmt. —

Alle Dreiecke also, welche aus drei Linien construirt werden, welche einzeln genommen, drei angenommenen Linien gleich sind, können in keinerlei Beziehung von einander verschieden sein.

Hieraus geht auch hervor, wie man ein Dreieck construiren kann, das mit einem gegebenen congruent ist.

II. Zusatz. Soll eine geradlinige Figur nachgezeichnet werden, so zerlege man sie von einem Ecke aus durch Diagonalen in Dreiecke, und zeichne diese

so nach, dass die neuen Dreiecke dieselbe gegenseitige Lage erhalten, wie jene Dreiecke; so bilden dieselben eine der gegebenen Figur congruente. —

§. 23.

Aufgaben. (Fig. 22.) 1.) Einen gegebenen Winkel ABC nachzuzeichnen.

Auflösung. Man ziehe AC, und construiere aus AB, AC und BC das Dreieck abc (§. 19.), so ist abc der verlangte Winkel.

Beweis.

$$\text{Es ist } ab = AB$$

$$ac = AC$$

$$bc = BC$$

folglich $\triangle abc \cong \triangle ABC$ (§. 22.)

und $abc = ABC$ (§. 20. Zus. II.)

2) Einen gegebenen geradlinigen Winkel zu halbiren.

Auflösung. Der gegebene Winkel sei ABC (Fig. 25.).

Man schneide die gleichen Stücke BD und BE von den Schenkeln ab, ziehe DE, errichte darüber das gleichschenklige $\triangle DEF$ (§. 19.), worin $DF = EF$ ist, und ziehe BE, so halbirt diese Linie den Winkel, und es ist

$$\angle o = \angle x = \frac{1}{2} ABC$$

Beweis. Daten. $BD = BE$

$$DF = FE$$

$$BF = BF$$

} (vermöge d. Constr.)

Mithin $\triangle BDF \cong \triangle BEF$ (§. 22.)

und $\angle o = \angle x$ (§. 20. Zus. II.)

§. 24.

Aufgabe. (Fig. 26.) Eine gegebene gerade Linie zu halbiren.

Auflösung. Die gegebene Linie sei AB. Man errichte darüber ein gleichschenkliges $\triangle ABC$ (§. 19.) und halbire durch CD den Winkel ACB (§. 23. 2.), so muss $AE = EB$ sein.

Beweis.

Dat. (Es ist $AC = CB$
 $o = n$
 $CE = CE$ } gemäss der Construction.

Daher $\triangle ACE \cong CBE$ (§. 20.) und folglich
 $AE = EB$ (§. 20. Zus. II.).

§. 25.

(**Aufgaben.** 1) In einem gegebenen Punkte C einer geraden Linie AB auf dieser eine Senkrechte zu errichten. (Fig. 27.).

2) Von einem gegebenen Punkte C auf die gerade Linie AB eine Senkrechte zu fällen. (Fig. 28.).

Auflösung. Man setze den Zirkel in C ein, durchschneide AB mit einer beliebigen Zirkelöffnung in M und N, und construire das gleichschenklige Dreieck MND in Aufgabe Nro. 1. ober-, und in Nro. 2. unterhalb MN, so muss DC senkrecht auf AB stehen, oder

Beweis. Thes. $o = n = R$ sein.

Dat. ad 1) $MC = CN$ (§. 15. Zus. I.)

$MD = DN$

$CD = CD$

also $\triangle MCD \cong \triangle CDN$ (§. 22.)

und $o = n = R$ (§. 20. Zus. II. und §. 9. Zus. II.)

ad 2) $MC = CN$ (§. 15. Zus. I.)
 $x = y$ (§. 23. 2.)
 $CE = CE$

daher $\triangle MCE \cong \triangle CEN$ (§. 20.)
 und $o = n = R$ (§. 20. Zus. II.) und
 (§. 9. Zus. II.)

I. Zusatz. (Fig. 27.) Eine gerade Linie CD, die aus der Mitte der Grundlinie C eines gleichschenkligen Dreieckes MDN nach dessen Spitze gezogen ist, halbt das gleichschenklige Dreieck (denn es ist nach Beweis I. $\triangle MCD \cong \triangle CDN$ folglich $= \frac{1}{2} \triangle MDN$), sowie auch den Winkel an der Spitze (nämlich $z = p = \frac{1}{2} MDN$, nach §. 20. Zus. II.), und steht auf der Grundlinie senkrecht, da $o = n = R$ ist.

II. Zusatz. (Fig. 27.) Beschreibt man aus D mit $DM = DN$ einen Kreis, so erscheint MN als Sehne und vermöge I. Zus. steht daher eine gerade Linie, die aus der Mitte C einer Sehne nach dem Mittelpunkte des Kreises gezogen ist, auf der Sehne senkrecht, und halbt den Winkel des Ausschnittes (§. 15. c.).

III. Zusatz. (Fig. 28.) Eine gerade Linie CE, die den Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreieckes MCN halbt, halbt das Dreieck selbst (denn es ist nach Beweis II. $\triangle MCE \cong \triangle CEN$, folglich $= \frac{1}{2} \triangle MCN$), und seine Grundlinie (denn es ist $ME = EN$ [§. 20. Zus. II.], und steht auf ihr senkrecht (da $o = n = R$ ist.).

IV. Zusatz. (Fig. 28.) Vermöge des III. Zus.

halbirt eine gerade Linie, die den Winkel des Ausschnittes MCN halbirt, auch die Sehne des Ausschnittes und steht auf ihr senkrecht.

§ 26.

Lehrsatz. Wenn man in der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes eine Senkrechte auf derselben errichtet, so geht sie durch die Spitze des Dreieckes.

Beweis. (Fig. 29.) Gesetzt, die Senkrechte ginge nicht durch die Spitze A, sondern z. B. wie DE, so wäre

$EDB = R$ (§. 9. b.). Man ziehe AD,
dann ist $ADB = R$ (§. 25. Zus. I.)

Folglich wäre $ADB = EDB$, welches unmöglich ist.

Auf denselben Widerspruch kömmt man, wenn man statt DE die Lage FD annimmt.

Da nun die Senkrechte weder rechts noch links von A vorbeigehen kann, so muss sie durch A selbst gehen.

I. Zusatz. Eine Senkrechte, auf der Mitte einer Sehne errichtet, muss, gehörig verlängert, durch den Mittelpunkt des Kreises gehen.

II. Zusatz. Auf einer geraden Linie gibt es in einem Punkte nur eine Senkrechte.

§. 27.

Erklärung. Wenn man in einem Dreiecke ABC (Fig. 30.) eine Seite verlängert, so heisst der dadurch entstehende Winkel ausserhalb des Dreieckes, näm-

lich α , der äussere den inneren γ und δ entgegengesetzte [Aussenwinkel], und α der innere anliegende Winkel.

§. 28.

Lehrsatz. Wenn man in einem Dreiecke eine Seite verlängert, so ist jedesmal der äussere Winkel grösser als jeder der inneren entgegengesetzten.

Beweis. (Fig. 31.) Thes. 1) $\angle ACD > \angle BAC$

2) $\angle ACD > \angle ABC$

Dat. ad 1)

Man halbire AC , so ist $CE = AE$, ziehe BE , und mache dessen Verlängerung $EF = BE$. Zieht man ferner FC , so ist auch $\alpha = n$ (§. 12.)

Mithin $\triangle EFC \cong \triangle AEB$ (§. 20.)

und $\angle ACF = \angle BAC$ (§. 20. Zus. II.)

Es ist aber $\angle ACF < \angle ACD$, als Theil vom Ganzen,

folglich $\angle BAC < \angle ACD$.

ad 2) Man verlängere AC über C , so ist

$\angle ACD = \angle BCG$ (§. 12.) Es ist aber

$\angle ABC < \angle BCG$ (vermöge 1.; denn $\angle ABC$ hat in Bezug auf BCG dieselbe Lage als $\angle BAC$ in Bezug auf ACD)

folglich $\angle ACD > \angle ABC$.

Zusatz. (Fig. 32.) In einem Dreiecke, das einen rechten Winkel hat, sind die beiden anderen spitz; denn sie müssen kleiner sein, als der äussere entgegengesetzte, der ebenfalls ein rechter ist (§. 10. Zus. IV.).

§. 29.

Lehrsatz. (Fig. 33.) In jedem Dreiecke ist

die Summe je zwei und zweier Winkel kleiner als 2 rechte.

Beweis. Thes. 1) $x + z < 2 R$

2) $y + z < 2 R$

3) $x + y < 2 R$

Daten. Man verlängere BC über C und B, so ist

ad 1) $x < o$ (§. 28.)

$z = z$

folglich $x + z < o + z$

also $x + z < 2 R$ (§. 10.)

ad 2) Es ist: $y < o$ (§. 28.)

$z = z$

Mithin $y + z < o + z$

und $y + z < 2 R$ (§. 10.)

ad 3) Es ist: $x < m$ (§. 28.)

$y = y$

Also $x + y < m + y$

und $x + y < 2 R$ (§. 10.)

I. Zusatz. Ein Dreieck kann nur einen rechten und auch nur einen stumpfen Winkel haben. Im ersten Falle heisst das Dreieck rechtwinklig, im zweiten stumpfwinklig.

Bei rechtwinkligen Dreiecken heissen die zwei Seiten, welche den rechten Winkel bilden, Katheten, die dritte Seite Hypotenuse.

II. Zusatz. Man kann von einem Punkte auf eine gerade Linie nur eine Senkrechte fallen; denn gäbe es deren zwei, so entstünde ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln.

§. 30.

Lehrsatz. (Fig. 34.) In jedem Dreiecke steht der grössere Winkel der grösseren Seite gegenüber.

Beweis. Thes. $ABC \triangleright C$

Daten. $AC \triangleright AB$. Man trage AB , von A aus,

auf AC auf, so, dass $AD = AB$ wird, so muss, wenn man BD zieht,

$o = n$ sein (§. 20. Zus. IV.)

Es ist aber $n \triangleright C$ (§. 28.)

Mithin auch $o \triangleright C$

Nun ist $o \triangleleft ABC$ als Theil;

folglich muss $ABC \triangleright C$ sein.

I. Zusatz. In jedem Dreiecke steht dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber, d. i. (Fig. 34.), wenn $ABC \triangleright C$ ist, so muss $AC \triangleright AB$ sein; denn wären beide Seiten gleich, so müssten es die auch Winkel ABC und C sein (§. 20. Zus. IV.), und wäre $AC \triangleleft AB$, so müsste dem Lehrsatze gemäss $ABC \triangleleft C$ sein. Da nun unter der Voraussetzung, dass $ABC \triangleright C$ ist, die Seite AC weder mit AB gleich, noch kleiner sein kann, als AB , so muss sie grösser als AB sein.

II. Zusatz. In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse grösser als jede Kathete, und im stumpfwinkligen die Seite die grösste, die dem stumpfen Winkel gegenübersteht. (Zus. I.)

III. Zusatz. Die Senkrechte ist die kürzeste gerade Linie, die man von einem Punkte nach einer geraden Linie ziehen kann (Zus. II.), denn jede andere ist Hypotenuse. Man bedient sich der Senkrechten zur Bestimmung der Entfernung eines Punktes von einer

geraden Linie. So ist die Höhe eines Dreieckes die Senkrechte von der Spitze auf die Grundlinie.

§. 31.

Lehrsatz. (Fig. 35.) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie zwei Seiten und den der grösseren derselben gegenüberstehenden Winkel gegenseitig gleich haben.

Beweis. Thes. $\triangle ABC \cong \triangle abc$.

Dat. $AB = ab$, $AC = ac$, $B = b$, $AC \succ AB$,
 $ac \succ ab$.

Man lege das Dreieck abc so auf das Dreieck ABC , dass b in B und ab in die Richtung von AB , also a in A fällt, weil $ab = AB$ ist; auch fällt dann bc in die Richtung von BC , indem $B = b$ ist.

Nun muss, weil auch $AC = ac$ ist, der Punkt c in C fallen, denn gesetzt er fiel nicht in C , so müsste er

a) entweder zwischen B und C , oder
b) in die Verlängerung von BC fallen. Jedoch weder das Eine noch das Andere kann sein. Denn

ad a) fiel c zwischen B und C , z. B. in D , so dass

$BD = bc$ ist, und zieht

man AD , so ist auch

$AB = ab$ und

$B = b$. Es wäre

folglich $\triangle ABD \cong abc$ (§. 20.) und daher

auch $AD = ac = AC$ (§. 20. Zus. II.)

also $o = n$ (§. 20. Zus. IV.) und

da $o \succ B$ (§. 28.) so wäre

auch $n \succ B$ mithin

$AB \succ AC$ (§. 30. Zus. I), welches der Voraussetzung

$AC \succ AB$ widerspricht.

ad b) Fiele c in die Verlängerung von BC z. B. in F , so, dass $BF = bc$ ist, und zieht man AF , so ist auch

$AB = ab$

$B = b$, folglich wäre

$\triangle ABF \cong \triangle abc$, und daher

$AF = ac = AC$ (§. 20. Zus. II.) Dann müsste

aber $x = m$ (§. 20. Zus. IV.) und da

$m \succ B$ (§. 28.) ist, auch

$x \succ B$ sein, folglich wäre

$AB \succ AF$ (§. 30. Zus. I.) und da $AF = AC$

auch $AB \succ AC$, gegen die Voraussetzung. $AC \succ AB$.

Es muss also c in C fallen, und

$BC = bc$ sein. Es ist aber

auch $AB = ab$ [Daten], und

$B = b$ [Daten].

Mithin $\triangle ABC \cong \triangle abc$ (§. 20.)

I. Zusatz. Durch zwei Seiten und den, der grösseren derselben gegenüberstehenden Winkel ist ein Dreieck vollkommen bestimmt.

II. Zusatz. Rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn sie nebst der Hypotenuse auch eine Kathete gleich haben.

III. Zusatz. Wenn man aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Grundlinie eine Senkrechte fällt, so theilt diese den Winkel an der Spitze, die Grund-

linie und das Dreieck in zwei gleiche Theile; denn in Fig. 36. ist $\triangle ABD \cong \triangle ADC$, weil $o = n = R$ (verm. Construct.) und $AB = AC$, dann $AD = AD$ ist (Zus. II.); folglich muss $x = y$ und $BD = DC$ (§. 20. Zus. II.) sein.

IV. Zusatz. Wenn man vom Mittelpunkte eines Kreises eine Senkrechte auf eine Sehne fällt, so halbirt sie die Sehne und den Winkel des Ausschnitts (Zus. III.).

§. 32.

Lehrsatz. (Fig. 35.) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen gegenseitig eine Seite und zwei gleichliegende Winkel gleich sind.

Beweis.

Thesis. $\triangle ABC \cong \triangle abc$.

Es finden hier zwei Fälle statt, nämlich:

a) entweder liegen beide Winkel des ersten Dreieckes, welche einzeln den entsprechenden Winkeln des zweiten Dreieckes gleich sein sollen, an der gegebenen Seite, oder

b) es liegt nur einer daran.

ad a) Daten. $AB = ab$, $B = b$, $BAC = bac$.

Man lege das Dreieck abc so auf das Dreieck ABC , dass a in A , und ab in die Richtung von AB fällt, so muss, da $AB = ab$ ist, b in B fallen. Weil $a = A$, und $b = B$ ist, so muss ac in die Richtung von AC , und bc in die von BC fallen, und

$BC = bc$ sein.

Denn BC kann unter den Bedingungen des Lehrsatzes weder grösser noch kleiner als bc sein.

Wäre $BC > bc$, z. B.

denn auch $BD = bc$, und zieht man AD ,

$$\left. \begin{array}{l} \text{so ist } AB = ab \\ \text{und } B = b \end{array} \right\} \text{(Dat.)}$$

Mithin $\triangle ABD \cong \triangle abc$ (§. 20.)

Folglich müsste $BAD = bac$ (§. 20. Zus. II.)

und $BAD = BAC$ (Dat.)

sein, welches unmöglich ist, da BAD ein Theil von BAC ist.

Wäre $BC < bc$, z. B.

$BF = bc$, und zieht man AF ,

$$\left. \begin{array}{l} \text{so ist } AB = ab \\ \text{und } B = b \end{array} \right\} \text{(Dat.)}$$

Daher $\triangle ABF \cong \triangle abc$ (§. 20.)

Folglich müsste $BAF = bac$ (§. 20. Zus. II.)

und $BAF = BAC$ (Dat.) sein, welches ebenfalls unmöglich ist, da BAC ein Theil von BAF ist, Es muss also $BC = bc$ sein.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Auch ist } AB = ab \\ \text{und } B = b \end{array} \right\} \text{(Daten.)}$$

Mithin $\triangle ABC \cong \triangle abc$ [§. 20.] (Beweis für a.)

ad b) Daten. $AB = ab$, $B = b$, $ACB = acb$.

Auch hier lege man das $\triangle abc$ so auf das $\triangle ABC$, dass der Punkt a in A , ab in die Richtung von AB , folglich b auf B fällt, da $ab = AB$ ist. Es muss dann bc in die Richtung von BC fallen, denn es ist der Winkel $b = B$, und da auch $ACB = acb$ ist, so muss der Punkt c in C fallen, oder

$BC = bc$ sein;
denn auch hier kann unter den Bedingungen des Lehrsatzes BC weder grösser noch kleiner als bc sein.

Wäre $BC > bc$, z. B.

$BD = bc$, und zieht
man AD ,

so ist $AB = ab$
und $B = b$ } (Dat.)

$\triangle ABD \cong \triangle abc$ (§. 20.),
und es wäre

auch $ADB = acb$ (§. 20. Zus. II.)

und $ADB = ACB$ (Dat.) welches dem
Lehrsatz §. 28. widerspricht.

Wäre $BC < bc$, z. B.

$BF = bc$, und zieht
man AF ,

so ist $AB = ab$
und $B = b$ } (Dat.)

$\triangle ABF \cong \triangle abc$ (§. 20.),

und es

wäre $AFB = acb$ (§. 20. Zus. II.)

und $AFB = ACB$ (Daten.) ebenfalls
gegen §. 28.

Es muss also $BC = bc$ sein, und

da $AB = ab$
 $B = b$ } (Dat.) ist,

so ist auch hier $\triangle ABC \cong \triangle abc$ [§. 20.] (Beweis
für b .)

§. 33.

Fragen zur Uebung.

1) Welches ist die einfachste geradlinige Figur, und wie werden die geradlinigen Figuren im Allgemeinen eingetheilt?

2) Welche Stücke müssen zwei Dreiecke beziehungsweise gleich haben, wenn sie congruent sein sollen, und wie heissen die oben vorgekommenen Lehrsätze bezüglich der Congruenz der Dreiecke?

3) Welche Bestimmungsstücke müssen von einem Dreiecke gegeben sein, damit man dasselbe construiren kann, und wie wird in jedem einzelnen Falle die Construction vollzogen?

4) Welche Eigenschaften der gleichschenkligen Dreiecke sind im vorhergehenden nachgewiesen worden? Auf welchen Sätzen beruhen diese Eigenschaften?

5) Welche Eigenschaften wurden für ein beliebiges Dreieck in Beziehung auf seine Winkel und Aussenwinkel; welche aber in Beziehung auf seine Seiten nachgewiesen, und wie können diese Eigenschaften für das rechtwinklige Dreieck ausgesprochen werden?

6) Welche Eigenschaften lassen sich bezüglich der von einem in oder ausserhalb einer Geraden liegenden Punkte auf diese gezogenen Senkrechten nachweisen, und wie kann man die hiebei vorkommenden Constructionen vollführen?

7) Durch welche Stücke ist ein Kreis der Lage und Grösse nach bestimmt, und wenn sind zwei Kreise einander gleich?

8) Welche Eigenschaften des Kreises wurden in Beziehung auf seine Sehnen, Mittelpunktswinkel etc. im II. Abschnitt nachgewiesen? —

III. Abschnitt.

Von den Parallellinien.

§. 34.

Erklärungen. Parallellinien sind gerade, in einer Ebene liegende, Linien, die in allen Punkten gleichen Abstand von einander haben, welcher Abstand durch eine Senkrechte von irgend einem Punkte der einen auf die andere gemessen wird. (§. 30. Zus. III.) (a.)

Diese gleichen Abstände geben zu erkennen, dass Parallelen nie zusammenstossen, wenn sie auch beiderseits wie immer verlängert werden.

Das Zeichen des Parallelseins zweier Linien ist #

(a) In dieser Erklärung liegt das Axiom zu Grunde, dass die Linie, welche durch die Endpunkte aller, auf einer geraden Linie errichteten, gleich grossen, Perpendikel geht, eine gerade sei. Dieses Axiom möchte darin vor dem Euklidischen einen Vorzug haben, dass die Vorstellungskraft nicht genöthiget ist, sich ins Unendliche zu verlieren, und dass es unmittelbar mit dem Begriffe einer geraden Linie zusammenhängt. Denn in der geraden Linie haben alle Punkte einerlei Lage gegen einander, in soferne man auf ihre Abstände nicht achtet (§. 4.); die darauf senkrechten Geraden haben einerlei Lage gegen dieselbe; die Endpunkte dieser gleich gross genommenen Senkrechten haben also auch einerlei Lage unter einander, gleich den Punkten auf jener, und liegen daher in einer geraden Linie.

z. B. $AB \parallel CD$ (Fig. 37.). Wenn zwei Parallelen (Fig. 38.) AB und CD von einer Geraden EF durchschnitten werden, so entstehen 8 Winkel, wovon x, y, m und o die innern, dann n, s, t und u die äussern heissen; y und o , dann x und m sind innere, s und u , dann n und t äussere auf einer Seite liegende Winkel. x und o , so auch y und m sind innere, s und t , so wie n und u äussere Wechselwinkel. Endlich hat man auch äussere und innere entgegengesetzte oder correspondirende Neigungswinkel, als s und o , n und m , t und x , u und y .

§. 35.

Lehrsatz. Steht eine gerade Linie auf einer von zwei Parallelen senkrecht, so steht sie auch auf der andern senkrecht.

Beweis. (Fig. 37.) Thesis. $m = n = R$.

Daten. $AB \parallel CD$, $EFC = EFD = R$. Man mache $FG = FH$, und errichte JG und KH auf CD senkrecht, so ist auch

$JGF = KHF = R$, und, da $AB \parallel CD$, auch

$JG = KH$ (§. 34.); zieht man JF und KF ,

so ist, weil auch $FG = FH$ (Construct.) ist,

$\triangle JGF \cong \triangle KHF$ (§. 20.), mithin

$o = x$ und $JF = KF$ (§. 20. Zus. II.)

Es ist auch $o + y = z + x = R$ (Daten.)

$o = x$

Also $y = z$, dann

$$JF = KF$$

$$EF = EF$$

folglich $\triangle IEF \cong \triangle EKF$ (§. 20.), und

$$m = n = R \quad (\S. 20. \text{ Zus. II. und } \S. 9. \text{ Zus. II.})$$

Zusatz. Es sind also JG, EF und KH die Abstände sowohl der Linie AB von CD, als auch der Linie CD von AB.

§. 36.

Lehrsatz. Wenn zwei parallele Linien, AB und CD, (Fig. 38.) durch eine dritte EF geschnitten werden, so sind

I. die Wechselwinkel gleich,

II. der äussere und innere entgegengesetzte Winkel (die correspondirenden Neigungswinkel) gleich.

III. die zwei inneren, auf einer Seite liegenden, Winkel zusammen genommen zwei rechten gleich.

Beweis. ad I. Th. $x = o$.

Dat. $AB \parallel CD$. Man halbire GH, fälle von dem Halbierungspunkte L auf CD die Senkrechte LK, und verlängere sie bis J; so muss diese Linie auch auf AB senkrecht stehen (§. 33.).

Es ist dann $LJG = LKH = R$

$$GL = LH \text{ (Daten.)}$$

$$ILG = HLK \quad (\S. 12.)$$

Mithin $\triangle LIG \cong \triangle LKH$ (§. 32.), und

folglich $x = o$ (§. 20. Zus. II.)

ad II., Th. $s = o$

Dat. $AB \parallel CD$. Es ist $s = x$ (§. 12.)

$$x = o \text{ (I.)}$$

also $s = o$ [denn wenn zwei

Grössen einer und derselben dritten Grösse gleich sind, so müssen dieselben auch unter sich gleich sein].

ad III. Thes., $o + y = 2 R$.

Dat. $AB \parallel CD$. Es ist $x + y = 2 R$ (§. 10.),

da aber $x = o$ (I.) ist, so muss

auch $o + y = 2 R$ sein.

I. Zusatz. Schneidet EF die Parallelen so, dass ein Winkel ein rechter ist, so sind auch alle übrigen rechte.

II. Zusatz. Zwei Winkel, deren Schenkel je zwei und zwei parallel laufen, und die beide spitz oder beide stumpf sind, sind gleich, d. i. (Fig. 39.) $ACB = DFE$, wenn $AC \parallel DF$ und $BC \parallel EF$ ist; denn, zieht man durch F und C die Linie GF, so ist

$$\left. \begin{array}{l} o = n \\ \text{und } x = y \end{array} \right\} \text{(Lehrs. II.)}$$

Mithin $o + x = n + y$, oder $ACB = DFE$.

Ist aber ACH stumpf, während DFE spitz ist, so müssen beide Winkel in Summe gleich $2 R$ sein; denn man hat $ACB + ACH = 2 R$ (§. 10.),

und da $ACB = DFE$ (wie vorhin bewiesen wurde),

so hat man $ACH + DFE = 2 R$.

§. 37.

Lehrsatz. (Fig. 40.) Wenn zwei gerade Linien AB und CD, durch eine dritte EF geschnitten werden, so, dass

- I. Die Wechselwinkel, o und x , gleich sind, oder
- II. der äussere s dem inneren entgegengesetzten o gleich ist, oder, dass

III. die beiden inneren, auf einer Seite liegenden, Winkel y und o zusammen $= 2 R$ sind; so sind die Linien AB und CD parallel.

Beweis. ad I. Thes. $AB \# CD$.

Daten. $x = o$. Man fälle GH senkrecht auf CD , und mache $IG = HK$, ziehe dann IK , so ist,
da $KG = KG$,

$\triangle IGK \cong \triangle KGH$ (§. 20.), und

daher $IK = GH$ (§. 20. Zus. II.),

und $I = H = R$.

Daher $AB \# CD$ (§. 34.), denn beide Linien haben gleiche Abstände IK und GH , und man könnte auf dieselbe Weise zeigen, dass nicht allein $IK = GH$, sondern dass auch an jedem anderen Orte beide Linien eben so weit von einander abstehen, als in I und G .

ad II. Thes. $AB \# CD$.

Dat. $s = o$. Es ist aber

$s = x$ (§. 12.)

Also auch $o = x$, folglich

$AB \# CD$ (I.).

ad III. Thes. $AB \# CD$

Daten. $y + o = 2 R$. Es ist aber

auch $y + x = 2 R$ (§. 10.).

Mithin $y + o = y + x$ und

$o = x$ [da die Gleichheit beider Theile

unverändert bleibt, wenn man

gleiche Grössen oder wie hier,

eine und dieselbe Grösse y auf

beiden Seiten subtrahirt],

folglich $AB \# CD$ (I.).

I. Zusatz. Durch einen Punkt G (Fig. 41.) gibt es zu CD nur eine Parallele; denn wäre z. B. ausser AB auch ab durch G parallel zu CD , so müsste, wenn man EF durch G zieht

$$y + BGF = 2 R = y + bGF \quad (\S. 36. \text{ III.}),$$

mithin $BGF = bGF$ sein, welches unmöglich ist.

II. Zusatz. Zwei gerade Linien, die zu einer dritten parallel sind, sind es auch unter sich, denn wenn (Fig. 41.) $AB \parallel CD$, und $KI \parallel CD$ ist, so muss, wenn man sie durch EF schneidet, $x = y$ und $z = y$ (§. 36. II.), folglich $x = z$, und daher $AB \parallel KI$ sein (Lehrs. II.).

III. Zusatz. Wenn zwei gerade Linien, ab und CD , (Fig. 41.) von einer dritten EF geschnitten werden, und die Summe der inneren, auf einer Seite liegenden, Winkel, d. i. $GHD + HGb < 2 R$ ist, so müssen sich ab und CD , auf der Seite bei b und D , wo diese Winkel liegen, gehörig verlängert, schneiden. Denn, schnitten sie sich nicht, so müssten sie entweder divergiren oder parallel sein. Zieht man durch G , $AB \parallel CD$, so ergibt sich, dass ersteres unmöglich ist, da $BGH > bGH$, folglich bG zwischen GB und HD fällt. Auch das Letztere kann nicht Statt finden; denn sonst gäbe es durch G zwei Parallelen zu CD , (gegen den I. Zus.).

§. 38.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt G (Fig. 42.) zur Linie CD eine Parallele zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe von G nach CD die Linie GF , und trage den Winkel y , in G auf der entgegengesetzten Seite, an FG auf (§. 23. No. 1), so, dass $o = y$

wird, und verlängere AG; so ist $AB \parallel CD$, gemäss §. 37. I.

Anmerkung. Zuweilen reicht folgende Construction hin, um mit einer gegebenen Linie L durch einen Punkt P eine Parallele zu ziehen. Man stelle ein Lineal so, dass die eine Kante desselben mit L zusammenfällt, drehe das Zeichnungsblatt sodann, bis ein weit entfernter Punkt am Horizonte in der Verlängerung der obern Kante des gehörig aufgestellten Lineals erscheint. Nun befestige man in dieser Lage das Zeichnungsblatt, lege die Kante des Lineals an P an, und drehe dieses so, dass eine untere oder eine obere Kante mit jenem am Horizonte in's Auge gefassten Punkt in einer Geraden liegt, ziehe sodann die Linie, welche die Richtung der Kante des Lineals angibt, so wird dieselbe mit L sehr nahe parallel sein. Je weiter der beobachtete Punkt vom Standorte entfernt liegt, um so richtiger wird auch diese Construction ausfallen.

§. 39.

Lehrsatz. Wenn man in einem Dreiecke eine Seite verlängert, so ist der äussere Winkel so gross, als die Summe der beiden innern entgegengesetzten.

Beweis. (Fig. 43.) Thes. $\angle ACD = x + y$.

Daten. Man ziehe durch C die Linie $CE \parallel AB$ (§. 38.), so

ist $x = o$ (§. 36. I.), und auch

$y = n$ (§. 36. II.)

Mithin $x + y = o + n = \angle ACD$.

§. 40.

Lehrsatz. In jedem Dreiecke ist die Summe aller Winkel $= 2 R$.

Beweis. (Fig. 30.) Thes. $y + z + x = 2 R$.

Dat. Man verlängere BC, so ist:

$$y + z = o \text{ (§. 39.)}$$

$x \equiv x$ [Sind aber zwei Grössen einander gleich, und man vermehrt oder vermindert beide um eine und dieselbe Grösse, so müssen die erhaltenen Summen oder Differenzen beziehungsweise wieder einander gleich sein.]

Daher $y + z + x = o + x = 2 R$ (§. 10.)

I. Zusatz. Wenn zwei Winkel eines Dreieckes bekannt sind, so ist es auch der dritte. Wenn z. B. (Fig. 30.) die Winkel x und y bekannt wären, so hätte man $z = 2 R - (x + y)$. Im gleichschenkligen Dreiecke sind durch einen Winkel alle übrigen gegeben.

II. Zusatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel beziehungsweise gleich sind, so sind es auch die dritten.

Wenn z. B. (Fig. 22.) $A = a$ und $B = b$ ist, so muss, da $A + B + C = a + b + c = 2 R$ (Lehrs.), auch $C = c$ sein.

III. Zusatz. In jedem rechtwinkligen Dreiecke sind die zwei Winkel an der Hypotenuse zusammen einem rechten gleich. Ist das rechtwinklige Dreieck gleichschenklige, so ist jeder Winkel an der Hypotenuse $= \frac{1}{2} R$.

IV. Zusatz. Im gleichseitigen Dreiecke ist jeder Winkel $= 2 R$.

Anmerkung. Aus den Zus. III. und IV. folgt, wie man auf sehr einfache Weise die Hälfte und den dritten Theil eines rechten Winkels finden kann.

§. 41.

Lehrsatz. Die Summe S aller Winkel (b) eines jeden Vieleckes von n Seiten ist $(n - 2) 2 R$, d. h. so viele Mal $2 R$ als die, um 2 verminderte, Anzahl der Seiten ausdrückt.

Beweis. (Fig. 44.) Thes. $S = (n - 2) 2 R$.

Dat. Man ziehe in der Figur von einem Punkte M nach allen Ecken derselben gerade Linien, so entstehen so viele Dreiecke, als die Figur Seiten hat, d. i. n Dreiecke. Nun halten die Winkel von n Dreiecken zusammen $n \cdot 2 R = 2 n R$ (§. 40.) Es gehören aber die Winkel um M , welche $= 4 R$ sind (§. 10. Zus. II.) nicht zum Polygone; sie müssen also, um die Polygonswinkel allein zu erhalten, von obigen $2 n R$ abgezogen werden, und dann entsteht

$$S = 2 n R - 4 R = (n - 2) 2 R.$$

I. Zusatz. In jedem Vierecke ist $S = 4 R$, wel-

(b) Es ist hier, wie in allen diesen elementaren Betrachtungen, immer nur von hohlen, spitzen oder stumpfen — nicht aber von erhabenen Winkeln die Rede. Sollten die einspringenden Winkel, nämlich jene, welche $\triangleright 2 R$ und $\triangleleft 4 R$ sind, für irgend einen Zweck in Betracht gezogen werden müssen, so werden diese Winkel an dem entsprechenden Orte auch mit den gehörigen und verständlichen Zeichen versehen, um sie von den hohlen unterscheiden zu können.

chen Werth man erhält, wenn man in obiger Formel $n = 4$ setzt.

II. Zusatz. Ist die Figur regulär, so ist jeder Winkel

$$A = \frac{S}{n} = \frac{n-2}{n} 2R = \left[1 - \frac{2}{n}\right] 2R = \left[2 - \frac{4}{n}\right] R$$

So ist z. B. jeder Winkel eines regelmässigen Viereckes (Quadrates), $= (2 - \frac{4}{4}) R = R$; jeder Winkel eines regelmässigen Fünfeckes $= 2 - \frac{4}{5} R = \frac{6}{5} R$; jeder Winkel eines regelmässigen Sechseckes $= (2 - \frac{4}{6}) R = (2 - \frac{2}{3}) R = \frac{4}{3} R$ etc.

III. Zusatz. In allen geradlinigen Vielecken, von gleich vielen Seiten, sind die Summen aller Winkel immer gleich.

§. 42

Aufgabe. (Fig. 45.) Am Ende A einer geraden Linie eine Senkrechte auf diese zu errichten.

Auflösung. Man nehme in AB den Punkt E beliebig, und errichte über AE ein gleichschenkliges Dreieck ACE (§. 19.), verlängere CE so, dass $DC = CE$ wird, und ziehe AD, so ist diese auf AB senkrecht.

Beweis. Th. $DAB = R$

Daten. $AC = CE = DC$ (Construct.). Daher

$$\begin{aligned} n &= y & (\text{§. 20. Zus. IV.}) \\ \text{und } o &= x \end{aligned}$$

$$\text{Mithin } n + o = y + x$$

Es ist aber $(n + o) + (y + x) = 2R$ (§. 40.)

Mithin auch $(n + o) + (n + o) = 2R$, oder

$$2(n + o) = 2R, \text{ also}$$

$$n + o = DAB = R.$$

§. 43.

Fragen zur Uebung.

1) Nach welchen verschiedenen Arten kann man untersuchen, ob zwei Gerade unter sich parallel sind?

2) Nach welchen verschiedenen Methoden kann man durch einen gegebenen Punkt eine Parallele zu einer gegebenen Linie ziehen?

3) Welche neuen Eigenschaften der Dreiecke haben wir in diesem Abschnitte kennen gelernt?

4) Wie gross ist die Summe aller Winkel eines Fünfeckes, Sechseckes, Siebeneckes, Acht-, Neun- und Zehneckes?

5) Wie findet man durch Konstruktion die Hälfte, den dritten, vierten, sechsten und zwölften Theil eines rechten Winkels, wie aber $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ R?

6) Wie gross sind die beiden Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn der Winkel an der Spitze $1\frac{2}{5}$ R beträgt?

IV. Abschnitt.

Von den Eigenschaften der Parallelogramme und von der Gleichheit der geradlinigen Figuren.

§. 44.

Erklärungen. I. Ein Viereck heisst

1) ein Parallelogramm, wenn darin je zwei gegenüberstehende Seiten parallel sind. (Fig. 46. 47. 48. 49.)

a) Sind im Parallelogramme alle 4 Seiten gleich und alle Winkel rechte, so heisst es ein Quadrat. (Fig. 46.); ABCD stelle ein Quadrat vor.

b) Hat ein Parallelogramm vier gleiche Seiten und schiefe Winkel, so heisst es eine Raute oder Rhombus. In (Fig. 47.) sei $AB = BD = DC = CA$; B und C spitze, A und D aber stumpfe Winkel.

c) Sind im Parallelogramme nur die gegenüberstehenden Seiten gleich, und alle Winkel rechte, so heisst es ein Rechteck. (Fig. 48.)

d) Ein Parallelogramm, worin nur die gegenüberstehenden Seiten gleich und die Winkel schief sind, heisst ein Rhomboid. Fig. 49.) (a).

2) ein Trapez, wenn darin nur zwei gegenüberstehende Seiten parallel sind. (Fig. 50.) Hier ist nur $AB \parallel CD$.

3) ein Trapezoid; wenn keine Seite zur anderen parallel ist. (Fig. 51.)

II. Den Abstand zweier gegenüberstehender Seiten eines Parallelogrammes, die Senkrechte nämlich, welche man von einem beliebigen Punkte einer Seite auf die gegenüberstehende ziehen kann, nennt man die Höhe des Parallelogrammes, und jede dieser Seiten kann sodann Grundlinie genannt werden.

(a) Man benennt ein Parallelogramm dadurch, dass man zwei an entgegengesetzten Winkel stehende, Buchstaben nennt. So bezeichnet man z. B. das Parallelogramm (Fig. 47.) durch AD.

Bei einem Rechtecke ist eine Seite die Höhe, wenn man die anliegenden als Grundlinien annimmt. Das Quadrat hat gleiche Höhe und Grundlinie. —

III. In einem Dreiecke kann man jede Seite als Grundlinie annehmen, die vom gegenüberstehenden Scheitel auf diese Seite gezogene Senkrechte wird dann die Höhe des Dreieckes genannt.

I. Zusatz. Zieht man zur Grundlinie eines Dreieckes durch den gegenüberstehenden Scheitel eine Parallele, so ist der Abstand dieser Parallelen die Höhe des Dreieckes. (§. 34.)

Zwei Dreiecke, deren Grundlinien in einer Geraden liegen, und die entweder den dieser Grundlinie gegenüber liegenden Scheitel gemein haben, oder bei welchen dieser Scheitel in einer zur Grundlinie parallelen Linie liegt, haben gleiche Höhe.

Zwei Parallelogramme, die eine gemeinschaftliche Grundlinie haben, und bei welchen die dieser Grundlinie gegenüberliegenden Seiten in einer und derselben Linie liegen, haben gleiche Höhe.

Ein Dreieck hat mit einem Parallelogramme gleiche Höhe, wenn seine Grundlinie entweder in der des Parallelogrammes oder in der Verlängerung derselben liegt, seine Spitze aber in der oberen Grundlinie oder in deren Verlängerung sich befindet. —

II. Zusatz. Quadrate sind congruent, wenn sie eine, Rechtecke aber, wenn sie zwei zusammenstossende Seiten gleich haben; denn dann müssen sie, auf einander gelegt, sich decken. Gleich grosse Quadrate haben gleiche Seiten.

Anmerkung. Schliessen zwei Figuren gleiche Rauminhalte ein, oder haben dieselben gleiche Quanti-

tät, so sagt man: die Figuren sind einander gleich oder gleich gross. Gleichen Inhalt haben Figuren, wenn eine und dieselbe — als Einheit angenommene — Fläche in beiden gleich oft enthalten oder doch wenigstens nahezu gleich oft enthalten ist, so dass der Unterschied beider für unsere Betrachtungen nicht mehr in Anschlag gebracht werden kann. —

Es können daher zwei der Qualität nach von einander verschiedene Figuren dennoch gleich oder gleich gross sein.

§. 45.

Lehrsatz. In jedem Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Seiten und Winkel gleich.

Beweis. (Fig. 42.)

Th. 1) $AB = CD$. $AC = BD$. 3) $A = D$. 4) $B = C$.

Dat. $AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$. (§. 44. 1.) Man ziehe die Diagonale CB , so ist

$$\left. \begin{array}{l} o = y \\ n = x \\ CB = CB \end{array} \right\} (\text{§. 36. 1.})$$

Daher $\triangle ABC \cong \triangle BCD$ (§. 32.), und

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ AC = BD \\ A = D. \end{array} \right\} (\text{§. 20. Zus. II.})$$

Da $o = y$ und

$n = x$ ist, so ist auch

$$o + n = y + x, \text{ oder } ABD = ACD.$$

I. Zusatz. Parallelen zwischen Parallelen sind gleich.

II. Zusatz. Die Diagonale theilt jedes Pa-

rallelogramm in zwei congruente Dreiecke, und

III. Zusatz. Jedes Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogrammes, das mit ihm gleiche Höhe und Grundlinie hat; denn es ist $\triangle ABC \cong \triangle BCD = \frac{1}{2} AD$. Beide Dreiecke haben gleiche Grundlinien AB und CD, und gleiche Höhen mit AD, indem sie zwischen zwei Parallelen liegen (§. 30. Zus. III. und §. 34.)

IV. Zusatz. Wenn in einem Parallelogramme ein Winkel ein rechter ist, so sind es auch die übrigen. Denn in Fig. 48. ist, wenn $A = R$, auch $D = R$ (Lehrs.). Es ist aber auch $AB \parallel CD$, mithin $A + C = 2R$ (§. 36. III.), und da $A = R$ ist, so muss auch $C = R$, mithin $B = C = R$ (Lehrs.) sein.

V. Zusatz. Die Diagonalen eines Parallelogrammes halbiren sich gegenseitig. Denn

$$\triangle ABE \cong \triangle CED \text{ (§. 32), daher}$$

$$AE = DE, BE = CE \text{ (§. 20. Zus. II.)}$$

§. 46.

Lehrsatz. Wenn in einem Vierecke die gegenüberstehenden Seiten gleich sind, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis. (Fig. 52.) Th. 1) $AB \parallel CD$, 2) $AC \parallel BD$.

Daten. $AB = CD$

$AC = BD$. Es ist auch, wenn man die Diagonale zieht, $CB = CB$

Daher $\triangle ABC \cong \triangle BCD$ (§. 22.), mithin nach §. 20.

Zus. II.

$$\left. \begin{array}{l} 1) \text{ } o = y \text{ und daher } AB \parallel CD \\ 2) \text{ } x = n \text{ „ „ } AC \parallel BD \end{array} \right\} \text{ (§. 37. 1.)}$$

Zusatz. Sind in einem Vierecke bloss zwei gegenüberstehende Seiten gleich und parallel, so ist es ein Parallelogramm. Denn (Fig. 52.) wenn $AB =$ und $\parallel CD$ ist, so ist auch

$$o = y \text{ (§. 36. 1.)}$$

$$AB = CD$$

$$CB = CB$$

Also $\triangle ABC \cong \triangle BCD$ (§. 20.), und daher

$$x = n.$$

Mithin $AC \parallel BD$ (§. 37. 1.)

§. 47.

Lehrsatz. Wenn in einem Vierecke die gegenüberstehenden Winkel gleich sind, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis. (Fig. 52.) Th. 1) $AB \parallel CD$. 2) $AC \parallel BD$.

Daten. $A = D$
 $C = B$ } also $A + C = D + B$.

Es ist $A + C + D + B = 4 R$ (§. 41. Zus. I.),

oder $2 (A + C) = 4 R$ und

$$A + C = 2 R. \text{ Mithin}$$

$$AB \parallel CD \text{ (§. 37. 3.)}$$

Es ist auch $B + D = A + C$, also $= 2 R$.

Da aber $A = D$ ist, so muss

auch $B + A = 2 R$, und daher

$AC \parallel BD$ (§. 37. III.) sein.

§. 48.

Aufgabe. (Fig. 47.) Aus zwei Seiten AC und CD und dem eingeschlossenen Winkel C , ein Parallelogramm zu zeichnen.

Auflösung. Man zeichne an CD den Winkel C (§. 23. 1.), und trage auf den anderen Schenkel dieses Winkels AC auf. Aus D beschreibe man mit AC, und aus A mit CD Kreisbögen, und ziehe nach dem Durchschnittspunkte B die Linien AB und DB, so ist AD das verlangte Parallelogramm.

Beweis. Da zwei Seiten gegeben sind, so sind dadurch auch die übrigen zwei bestimmt (§. 45), und, weil nach der Construction $AB = CD$, dann $AC = BD$ ist, so muss nach §. 46. AD ein Parallelogramm sein.

§. 49.

Lehrsatz. Zwei Parallelogramme, die einerlei Grundlinie und gleiche Höhe haben (oder zwischen zwei Parallelen liegen), sind gleich.

Beweis. Hier ergeben sich 3 Fälle.

- I. EF fällt zum Theile auf AB (Fig. 53.),
- II. EF stösst an AB (Fig. 54.), oder
- III. EF fällt ausserhalb AB (Fig. 55.).

ad. I.) Thes. $AD = CF$ (Fig. 53.)

Dat. $CD = CD$, $AF \parallel CD$.

Es ist $AB = CD = EF$ (§. 45.)

— $EB =$ — EB .

Also $AB - EB = EF - EB$, oder

$AE = BF$. Auch ist

$AC = BD$
 $EC = FD$ } (§. 45.)

Folglich $\triangle ACE \cong \triangle BDF$ (§. 22.)

Trap. $ED =$ Trap. ED . Mithin

$\triangle ACE + \text{Trap. } ED = \triangle BDF + \text{Trap. } ED$, oder
 $AD = CF$

ad. II.) Thes. $AD = CF$ (Fig. 54.)

Dat. $CD = CD \# AF$.

Es ist $\triangle ABC \cong \triangle BCD$
 $\triangle BCD \cong \triangle BDF$ } (§. 45. Zus. II.)

Also $\triangle ABC + \triangle BCD = \triangle BCD + \triangle BDF$,
 oder

$$AD = CF.$$

ad. III. Thes. $AD = CF$. (Fig. 55.)

Dat. $CD = CD \# AF$.

Es ist $AB = CD = EF$ (§. 45.)

$$BE = BE$$

Folglich $AB + BE = EF + BE$, oder

$AE = BF$. Es ist auch

$$\left. \begin{array}{l} AC = BD \\ CE = DF \end{array} \right\} (\S. 45.)$$

Mithin $\triangle ACE \cong \triangle BDF$ (§. 22.)

$$- \triangle BGE = - \triangle BGE$$

$$+ \triangle GCD = + \triangle GCD$$

Also $\triangle ACE - \triangle BGE + \triangle GCD = \triangle BDF -$
 $- \triangle BGE + \triangle GCD$, oder $AD = CF$.

I. Zusatz. Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich. (Fig. 56.), d. i. $AD = EH$, wenn $CD = GH$ und $AF \# CH$ ist; denn, zieht man EC und FD , so ist

$$\left. \begin{array}{l} AD = CF \\ \text{und } CF = EH \end{array} \right\} (\text{Lehrs.})$$

Folglich $AD = EH$.

II. Zusatz. Dreiecke, von einerlei oder gleichen Grundlinien und gleichen Höhen,

sind gleich; denn sie sind nach §. 45. Zus. III. Hälften von Parallelogrammen, die mit ihnen einerlei oder gleiche Grundlinien und Höhen haben, und was für die Ganzen gilt, gilt auch für die Hälften.

III. Zusatz. Mehrere Dreiecke von gleichen Höhen sind zusammen einem Dreiecke gleich, welches dieselbe Höhe, und die Summe aller Grundlinien jener Dreiecke zur Basis hat; d. i. (Fig. 57.)

$\triangle ABC + \triangle CDE + \triangle EFG = \triangle ABG$, wenn $AF \parallel BG$, und $BG = BC + CE + EG$ ist. Denn

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC = \triangle ABC \\ \triangle CDE = \triangle ACE \\ \triangle EFG = \triangle AEG \end{array} \right\} \text{ (Zus. II.)}$$

Also $\triangle ABC + \triangle CDE + \triangle EFG = \triangle ABC + \triangle ACE + \triangle AEG = \triangle ABG$.

IV. Zusatz. (Fig. 58.) Ein Dreieck ABC ist so gross als ein Parallelogramm AE oder DF, das mit ihm dieselbe Höhe, aber nur die halbe Grundlinie hat; denn, da $CF \parallel AB$ und $BF \parallel AC$ ist, so ist

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} AF \text{ (§. 45. Zus. III.)}$$

$$\text{Nun ist } AE = DF = \frac{1}{2} AF \text{ (Zus. I.)}$$

Mithin $\triangle ABC = AE = DF$

§. 50.

Aufgaben. 1) Ein Parallelogramm in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen, so dass die Theilungslinien parallel zu einer Seite sind. —

Auflösung. Man theile eine Seite in die gegebene Anzahl gleicher Theile, und ziehe durch die Theilungspunkte Parallelen zu einer, an die getheilte Seite

anliegenden, Seite des Parallelogrammes. Dann müssen die dadurch entstandenen kleinen Parallelogramme gleich sein (§. 49. Zus. I.).

2) Ein Dreieck in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen, so, dass die Theilungslinien durch ein Eck des Dreieckes gehen.

Auflösung. Man theile eine Seite des Dreieckes in die gegebene Anzahl gleicher Theile, und ziehe von der gegenüberstehenden Spitze nach allen Theilungspunkten gerade Linien, so sind die kleineren Dreiecke einander gleich (§. 49. Zus. II.).

§. 51.

Lehrsatz. Wenn man durch einen Punkt der Diagonale eines Parallelogrammes, zu zwei aneinanderliegenden Seiten desselben, zwei Parallelen zieht, so erhält man vier Parallelogramme, wovon jene, durch welche die Diagonale nicht geht, gleich sind. (Man nennt letztere Ergänzungen an der Diagonale).

Beweis. (Fig. 59.) Thes. $AI = ID$.

Daten. $AB \parallel GH \parallel CD$; $AC \parallel EF \parallel BD$.

Es ist $\triangle ABC \cong \triangle BCD$
 $\triangle EIB \cong \triangle HIB$
 $\triangle IGC \cong \triangle ICF$ } (§. 45. Zus. II.)
 Daher

$$\triangle ABC - \triangle EIB - \triangle IGC = \triangle BCD - \triangle HIB - \triangle ICF, \text{ oder } AI = ID.$$

§. 52.

Erklärungen. Eine Figur verwandeln heisst, aus ihr eine andere Figur machen, die der ersten gleich ist, ohne mit ihr congruent zu sein.

Aufgaben. 1) (Fig. 55.) Ein Parallelogramm AD in ein anderes zu verwandeln, das einen gegebenen Winkel MNO hat.

Auflösung. Man construiere an die Grundlinie CD den gegebenen Winkel $\angle ECD = \angle MNO$ [§. 23. 1.]. Durch D ziehe man $DF \parallel CE$, und verlängere AB bis sie CE und DF schneidet, dann ist CF das verlangte Parallelogramm (§. 49.).

2) (Fig. 60.) Ein Dreieck ACD in ein anderes mit einem gegebenen Winkel α zu verwandeln.

Auflösung. Man ziehe durch A eine Parallele zur Grundlinie CD, mache $\angle BCD = \alpha$ (§. 23. 1), und ziehe BD, so ist das $\triangle BCD$ das verlangte Dreieck (§. 49. Zus. II.).

3) (Fig. 59.) Ein Parallelogramm DI in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Seite mn hat.

Auflösung. Man verlängere DF so, dass $CF = mn$ wird, ziehe CI, welche, verlängert, die Verlängerung von DH in B schneidet. Durch C ziehe man zu BD, und durch B zu CD Parallelen, die sich in A schneiden. Verlängert man endlich IH und FI, so ist AI das verlangte Parallelogramm mit der gegebenen Seite $GI = CF = mn$ (§. 51.).

4) Ein Dreieck in ein Parallelogramm mit einer gegebenen Seite zu verwandeln.

Auflösung. Man verwandle nach §. 49. Zusatz IV. das Dreieck in ein Parallelogramm, und dieses nach der dritten Aufgabe in ein anderes mit der gegebenen Seite.

5) Ein Parallelogramm in ein Dreieck zu verwandeln, das eine gegebene Seite hat.

Auflösung. Man verwandle nach der 3ten Auf-

gabe das gegebene Parallelogramm in ein anderes, das die Hälfte der gegebenen Seite des Dreieckes zur Grundlinie hat; dann verdopple man diese und ergänze das Dreieck (§. 49. Zus. IV.).

I. Zusatz. Man kann jedes Parallelogramm und jedes Dreieck in ein Rechteck verwandeln. (1. Aufg. und §. 49. Zus. IV.)

II. Zusatz. Jede geradlinige Figur lässt sich in ein Dreieck verwandeln. Man schneide nämlich (Fig. 100.) in der gegebenen Figur ABCDE durch eine Diagonale EC ein Dreieck EDC ab; durch die Spitze D desselben ziehe man mit der Diagonale EC eine Parallele, verlängere eine, an die Diagonale anstossende, aber nicht zu obigem Dreiecke gehörige, Seite BC der Figur, bis sie die Parallele trifft, und ziehe von diesem Punkte F eine gerade Linie EF bis zu dem anderen Endpunkte der Diagonale. Dadurch erhält man ein neues Dreieck ECF, das dem abgeschnittenen Dreiecke EDC gleich ist (§. 49. Zus. II.). Setzt man dieses neue Dreieck an die Stelle des alten, so bleibt die Grösse der Figur ungeändert; diese hat aber um eine Ecke weniger. Dieses Verfahren, lange genug wiederholt, gibt am Ende ein Dreieck, das der gegebenen Figur gleich ist. So ist hier $\triangle GEF =$ Fünfeck ABCDE. —

§. 53.

Lehrsatz. Beschreibt man über zwei Seiten AB und BC eines beliebigen Dreieckes ABC beliebige Parallelogramme ABFG und BCDE, verlängert die nicht aneinander stossenden Seiten DE und GF derselben, bis sie in einem Punkte H zusammenstossen, zieht in dem hierdurch entstandenen Vierecke BEHF die Dia-

gonale HB, und beschreibt nun über die dritte Seite AC des Dreieckes ein Parallelogramm ACLM, in welchem eine Seite $AM = CL = BH$ jener Diagonale gleich und parallel ist, so muss dieses Parallelogramm der Summe der über die beiden ersten Seiten beschriebenen Parallelogramme gleich sein.

Beweis. (Fig. 175.) Thes. $AL = AF + BD$.

Dat. $AG \parallel BF$ etc., $BC \parallel DE$,
 $BE \parallel CD$, $HB =$
 und $\parallel AM$; $AM \parallel CL$,
 $AC \parallel LM$.

Construction. Man verlängere MA bis Q, dem Durchschnitte mit GF, LC bis P dem Durchschnitte mit DH, und HB bis K, so ist

- 1) $AQ = BH = PC = AM = NK$ (§. 45. Zus. I.).
- 2) $AQHB = ANKM$ (§. 49. Zus. I.).
- 3) $BHPC = NCLK$ (§. 49. Zus. I.).
- 4) Es ist aber $ABHQ = ABFG$ und $BCPH = BCDE$ (§. 49.).

Daher auch $ANKM + NCLK = ABFG + BCDE$,
 oder $ACLM = ABFG + BCDE$.

§. 54.

Lehrsatz. In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse der Summe der Quadrate der beiden Katheten gleich.

I. Beweis. (Fig. 176.) Man errichte über AB und BC des bei B rechtwinkligen Dreieckes ABC die Quadrate ABFG und BCDE, verlängere DE und GF, bis sich diese Linien schneiden, es geschehe diess in H. Nun ziehe man die Diagonale BH, so muss

da $BE = BC$ (Konstruktion).
 $HE = BF = BA$ (§. 45. I. Zus.),

auch $\triangle BHE \cong \triangle ABC$ (§. 20.)

also $BH = AC$ (§. 20. Zus. II.) sein.

Errichtet man daher über AC ein Quadrat, so muss dieses, nämlich

$ACLM = ABFG + BCDE$ (§. 53.) sein,

oder $AC^q = AB^q + BC^q$

Dieser Satz ist also bloss ein spezieller Fall des vorigen. —

II. Beweis. (Fig. 61.) Thes. $AB^q + BC^q = AC^q$.

Daten. $ABC = R$. Man construire aus jeder Seite des Dreieckes ein Quadrat, fälle aus B auf die Hypotenuse AC die Senkrechte LB , und verlängere sie bis K ; dann ist $BK \parallel AH$ (§. 38. III.), und es sind AK und KC Parallelogramme (§. 44. 1.).

Nun hat man zu zeigen, dass

1) $AB^q = AK$ und

2) $BC^q = KC$ ist.

Ad 1) Man ziehe BH und CD , dann HL und BD , so ist:

$$x = y = R \text{ (§. 44. a.)}$$

$$o = o$$

folgl. $x + o = y + o$ oder

$DAC = BAH$. Auch

ist $\left. \begin{array}{l} AC = AH \\ AD = AB \end{array} \right\} \text{ (§. 44. a.)}$

Mithin $\triangle DAC \cong \triangle ABH$ (§. 20.)

Es ist aber $\triangle DAC = \triangle DAB = \frac{1}{2} AB^q$ [§. 49. Zus. II. und §. 45. Zus. III.]

und $\triangle ABH = \triangle AHL = \frac{1}{2} AK$ [§. 49. Zus. II. und §. 45. Zus. III.]

Daher auch $\frac{1}{2} AB^q = \frac{1}{2} AK$ und $AB^q = AK$.

Ad 2) Man ziehe BI und AG, dann LI und BG: so lässt sich auf dieselbe Art, wie bei Nro. 1., zeigen, dass $BC^q = KC$ ist.

Da nun $AB^q = AK$ und
 $BC^q = KC$ ist, so muss

$$AB^q + BC^q = AK + KC = AC^q \text{ sein (a).}$$

I. Zusatz. Aus der Gleichung $AB^q + BC^q = AC^q$ ist auch $AB^q = AC^q = BC^q$, d. h. das Quadrat aus einer Kathete ist, dem Unterschiede zwischen dem Quadrate der Hypotenuse und dem der anderen Kathete gleich.

II. Zusatz. Wenn in einem Dreiecke ABC (Fig. 62.) $BC^q = AB^q + AC^q$ ist, so muss es rechtwinklig, d. i. $BAC = R$, sein. Denn errichtet man in A auf AC die Senkrechte $AD = AB$, so ist, da $CAD = R$ ist, wenn man CD zieht,

$$\begin{aligned} CD^q &= AD^q + AC^q \\ &= AB^q + AC^q = BC^q, \text{ und daher auch} \end{aligned}$$

$$CD = BC \text{ (§. 44. Zus.). Es ist auch}$$

$$AC = AC$$

$$AD = AB \text{ (Construction.).}$$

Mithin $\triangle ACD \cong \triangle ABC$ (§. 22.), und also
 $BAC = DAC = R$.

(a) Dieser Satz heisst von seinem Erfinder Pythagoras, der pythagorische Lehrsatz, und ist eine reiche Quelle, woraus die wichtigsten Wahrheiten für die Geometrie fliessen.

§. 55.

Aufgaben. 1.) Fig. 63.) Zwei, oder mehrere, Quadrate in eines verwandeln, das so gross ist, als jene zusammen genommen.

Auflösung und Beweis. Man construire einen rechten Winkel MNO, mache $NP = a$, $NQ = b$, und ziehe PQ, so ist

$$PQ^2 = NP^2 + NQ^2 \quad (§. 54.)$$

oder

$$PQ^2 = a^2 + b^2$$

Macht man $NR = PQ$ und $NS = c$, so ist, wenn man RS zieht, $RS^2 = NR^2 + NS^2$,

$$\text{oder } RS^2 = PQ^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

2.) Die Seite eines Quadrates zu finden, das doppelt so gross ist, als ein gegebenes.

Man nehme die Diagonale des gegebenen Quadrates; denn es ist $AB^2 = AC^2 + CB^2$ (§. 54.), oder

$$AB^2 = a^2 + a^2 = 2a^2.$$

4.) Die Seite eines Quadrates zu finden, das der Hälfte eines gegebenen gleich ist.

Auflösung und Beweis. (Fig. 66.) AD sei das gegebene Quadrat, und jede Seite davon a. Man halbiere BC, und nehme die halbe Diagonale EC, so ist diese die verlangte Seite; denn es ist, wenn man ED zieht,

$$\left. \begin{array}{l} n = R \\ x = \frac{1}{2} CDB = \frac{1}{2} R \end{array} \right\} \quad (§. 25. \text{ Zus. I.})$$

Es muss also auch

$$o = \frac{1}{2} R \quad (§. 40. \text{ Zus. III.}) \text{ und daher}$$

$$CE = ED \quad (§. 21.) \text{ sein. Und da auch}$$

$$CD^2 = CE^2 + ED^2 \text{ (§. 54.)}$$

oder $CD^2 = CE^2 + CE^2 = 2CE^2$ ist, so muss

$$\frac{1}{2}CD^2 = CE^2 \text{ sein.}$$

5.) Man soll ein Quadrat finden, das dem dritten Theile eines gegebenen gleich ist, und sodann die Seite dieses Quadrates angeben.

Auflösung und Beweis. Theilt man die Seite des gegebenen Quadrates in 3 gleiche Theile, und beschreibt über einen solchen Theil ein Quadrat, so muss dieses (wie durch Construction leicht zu erweisen ist,) $\frac{1}{9}$ des gegebenen sein. Macht man nun ein Quadrat (I.), das dreimal so gross, als dieses gefundene ist, so wird dieses auch $\frac{1}{3}$ des gegebenen sein.

Ein ähnliches Verfahren wendet man auch an, um ein Quadrat in 4, 5, 6 etc. gleiche Quadrate zu zerlegen, oder ein Quadrat zu finden, das $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ etc. eines gegebenen ist.

§. 56.

Lehrsatz. Das Quadrat, welches man über die Summe zweier Linien errichten kann, besteht aus der Summe folgender drei Theile:

- a. dem Quadrate über die erste Linie,
- b. dem doppelten Rechtecke, das aus beiden Linien construirt werden kann,
- c. dem Quadrate aus der zweiten Linie.

Beweis. (Fig. 177.) Thesis. $(m + n)^2 = m^2 + 2 \text{ Rechteck } (m, n) + n^2$,

(wobei m und n diese Linien sind, und Rechteck (m, n) das aus m und n construirte Rechteck bezeichnen soll.)

Dat. und Construct. $AE = m$, $EB = n$; $AE + EB = m + n$.

$ABCD$ ein Quadrat, $AEFG$ ein Quadrat, FG sei bis K und FE bis H verlängert.

Es ist $ABCD = AE^2 + BEFK + DHFG + FKCH$.

Nun ist $BE = FK$; $BK = EF = n$

(§. 45. Zus. I.).

Ebenso ist $DG = HF = CK = BC - BK = n$.

Ferner sind $DHFG$, $EBKF$ und $CHKF$ Rechtecke (§. 45. Zus. IV.), daher vor Allem

$BEFK = GFHD = \text{Rechteck } (m, n)$ (§. 49. Zus. I.),
dann $FK = CK = CH = FH = n$, also $FKCH = n^2$

(§. 44. a.) Sohin

$(m + n)^2 = m^2 + 2 \text{ Rechteck } (m, n) + n^2$. —

I. Zusatz. Auf ähnliche Weise kann man nachweisen, dass das Quadrat aus einer Linie, welche dem Unterschiede zweier Linien gleicht, der Summe der Quadrate aus beiden Linien weniger dem doppelten aus diesen Linien construirten Rechtecke gleich ist.

II. Zusatz. Ein Rechteck, dessen eine Seite der Summe zweier Linien, und dessen andere Seite der Differenz derselben Linien gleich ist, ist dem Unterschiede aus den Quadraten beider Linien gleich. —

§. 57.

Lehrsatz. In einem stumpfwinkligen Dreiecke ist das Quadrat einer Seite, welche dem stumpfen Winkel gegenübersteht, um so viel grösser, als die Summe der Quadrate aus den beiden anderen Seiten, als ein doppeltes Rechteck angibt, von dem eine jener Seiten die Grundlinie, die Höhe aber das Stück der letzteren

ist, welches zwischen der auf diese gezogenen Höhe des Dreieckes und dem Scheitel des von beiden Seiten eingeschlossenen Winkels liegt

Beweis. (Fig. 178.) Thes. $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 \text{ Rechteck } (AB, BD)$.

Dat. $ABC \triangleright R$; $CDB = R$

Es ist $AC^2 = AD^2 + CD^2$ (§. 54.) 1)

ferner $AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2 \text{ Rechteck } (AB, BD)$
(§. 56.) 2)

$CD^2 = BC^2 - BD^2$ (§. 54. Zus. I.) 3)

Setzt man die Gleichungen (3) und (2) in Gleichung (1), so erhält man:

$AC^2 = AB^2 + BD^2 + 2 \text{ Rechteck } (AB, BD) + BC^2 - BD^2$,
oder $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 \text{ Rechteck } (AB, BD)$.

I. Zusatz. Es ist eben so leicht zu zeigen, dass,
(vorausgesetzt, dass $BEC = R$.)

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \text{ Rechteck } (AC, AE)$;
denn $CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2 \text{ Rechteck } (AC, AE)$
(§. 56. Zus. I.)

und $BE^2 = AB^2 - AE^2$ (§. 54. Zus. I.).

Hieraus

$BE^2 + CE^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \text{ Rechteck } (AC, AE)$;

aber

$BE^2 + EC^2 = BC^2$ (§. 54.),

also

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \text{ Rechteck } (AC, AE)$.

II. Zusatz. Halbirt man eine Seite eines Dreieckes, und zieht von ihrem Mittelpunkte nach dem gegenüberstehenden Scheitel des Dreieckes eine Gerade, so ist das Doppelte aus der Summe der Quadrate über diese

Halbirungslinie und der halben Seite so gross, als die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten. —

So ist (Fig. 52.), wenn $AE = ED$ ist:

$$AB^2 + BD^2 = 2 (AE^2 + BE^2)$$

III. Zusatz. In einem jeden Parallelogramme ist die Summe aus den Quadraten der Seiten der Summe aus den Quadraten der Diagonalen gleich. —

§. 58.

Fragen zur Uebung.

1.) Welches sind die Haupteigenschaften eines beliebigen Parallelogrammes?

2.) Unter welchen Bedingungen sind 2 Parallelogramme congruent? Welche Stücke sind ferner nöthig, damit ein Parallelogramm bestimmt ist?

3.) Wie kann man aus den beiden Diagonalen eines Parallelogrammes und dem von beiden eingeschlossenen Winkel das Parallelogramm construiren?

4.) Welches Verfahren muss man anwenden, um ein Sechseck in ein ihm gleich grosses Dreieck zu verwandeln, wenn ein Scheitel dieses Dreieckes in einem Ecke, und eine Seite desselben auf einer Seite des Sechseckes zu liegen kommen soll?

5.) In welchem Verhältnisse stehen Dreiecke mit gleichen Höhen zu einander?

6.) In welcher Beziehung stehen die Quadrate aus den Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes zu einander, in welcher aber jene aus den Seiten eines beliebigen Dreieckes?

7.) Wie kann man das Quadrat finden, welches entweder drei, oder vier oder fünfmal so gross, als ein

gegebenes Quadrat ist? Wie findet man die Seite eines solchen Quadrates?

8.) Wie kann man ein Parallelogramm finden, welches so gross ist, als zwei gegebene Parallelogramme zusammengenommen?

9.) Wie kann man ein Dreieck finden, welches so gross ist, als die Summe zweier gegebenen Dreiecke?

V. Abschnitt.

Von der Lage und Grösse der geraden Linien in Bezug auf den Kreis.

§. 59.

Lehrsatz. (Fig. 67.). Jede gerade Linie CD, die in dem Endpunkte A auf dem Radius AB senkrecht steht, ist eine Tangente. (§. 15. a.).

Beweis. Man nehme in CD den beliebigen Punkt E, und ziehe BE, so ist $BE > AB$ (§. 30. Zus. II., da $\angle BAE = R$ ist), mithin liegt E ausserhalb des Kreises.; d. h. jeder Punkt von CD, A ausgenommen, liegt ausserhalb des Kreises. Es ist daher CD eine Tangente (§. 15. a.).

Zusatz. Der Radius AB, den man an den Berührungspunkt A der Tangente CD zieht, steht auf ihr senkrecht; denn wäre diess nicht, so müsste eine andere gerade Linie, z. B. BE von B auf CD senkrecht fallen, und dann wäre $BE < AB$ (§. 30. Zus. III.), gegen die Natur der Tangente, indem dann E in die Kreisfläche fallen müsste.

§. 60.

Erklärung. Man sagt, ein Kreis ist 1) um eine Figur beschrieben, wenn sein Umkreis durch alle Winkelspitzen der Figur geht; 2) in einer Figur beschrieben, wenn er alle Seiten derselben berührt.

§. 61.

Aufgabe. Durch drei gegebene Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. (Fig. 68.). Man verbinde die drei gegebenen Punkte durch zwei gerade Linien, welche als Sehnen erscheinen, wenn der Kreis durch obige drei Punkte geht. Man errichte daher in der Mitte der beiden Linien AB und AC, auf diese, Senkrechte, wo diese sich schneiden (F), ist der Mittelpunkt des verlangten Kreises.

Beweis. Der Mittelpunkt liegt in beiden Perpendikeln, gemäss §. 26. Zus. I., und weil diese nur einen Punkt F gemein haben (§. 5. Zus. II.), so ist dieser der Mittelpunkt.

Man braucht nur noch zu zeigen, dass DF und EF sich schneiden müssen. Man ziehe DE. Da

$$ADF = R = AEF \text{ ist, so muss}$$

$$EDF < R, \text{ und auch}$$

$$DEF < R,$$

mithin $EDF + DEF < 2 R$ sein, folglich müssen sich DF und EF schneiden (§. 37. Zus. III.).

Zusatz. Wie obige Aufgabe löst man auch folgende:

- 1.) Den Mittelpunkt eines Kreises zu suchen.
- 2.) Um ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben (§. 60.).

- 3.) Den Mittelpunkt eines Kreises zu bestimmen, von dem nur ein Bogen gegeben ist. — §. 62.

Aufgabe. In einem Dreiecke einen Kreis zu beschreiben (§. 60.).

Auflösung. (Fig. 69.). Man halbire zwei Winkel des Dreieckes. In D , wo sich die Halbirungs-Linien schneiden, ist der Mittelpunkt, und die Senkrechte DE , von D auf eine Seite des Dreieckes, der Radius des verlangten Kreises.

Beweis. Da $B + C < 2 R$ (§. 29.) ist so muss auch $\frac{1}{2} (B + C) < 2 R$, d. i. $m + n < 2 R$ sein; folglich schneiden sich die Halbirungs-Linien (§. 35. Zus. III.). Man fälle von D auch auf AB und AC Senkrechte, so ist:

$$o = n \text{ (Construct.)}$$

$$BD = BD$$

$$x = y = R.$$

$$\text{Folglich } \triangle BFD \cong \triangle BDE \text{ (§. 32.)}$$

$$\text{Daher } FD = DE \text{ (§. 20. Zus. II.).}$$

$$\text{Auch ist } m = z \text{ (Construct.)}$$

$$DC = DC$$

$$u = v = R.$$

$$\text{Also } \triangle DEC \cong \triangle DGC \text{ (§. 32.)}$$

$$\text{und } DG = DE \text{ (§. 20. Zus. II.).}$$

Daher sind $FD = DE = DG$ Radien des Kreises, auf welchen die Seiten des Dreieckes senkrecht stehen, folglich Tangenten sind (§. 59.).

§. 63.

Erklärungen. (Fig. 70.). Der Winkel, der seinen Scheitel im Mittelpunkte eines Kreises hat, heisst Centralwinkel, z. B. DEF; hat er aber den Scheitel in der Peripherie, so heisst er Peripheriewinkel, z. B. ABC. Man sagt, sie ruhen auf den Bogen, die zwischen ihren Schenkeln liegen. So ruht z. B. DEF auf DF und ABC auf AC.

§. 64.

Lehrsatz. In Kreisen von gleichen Radien gehören zu gleichen Centralwinkeln gleiche Sehnen, Bogen, Aus- und Abschnitte.

Beweis. (Fig. 71.) Thes. 1) $AB = ab$.

2) Bog. $AB = \text{Bog. } ab$.

3) Sect. $ACB = \text{Sect. } acb$.

4) Segm. $ADB = \text{Segm. } adb$.

Daten. Es ist $ACB = acb$

$$AC = ac$$

$$CB = cb$$

Mithin $\triangle ACB \cong \triangle acb$ (§. 20.), und

$$AB = ab \text{ (§. 20. Zus. II.)}$$

Man lege C auf c, und CA längst ca, so muss, da $\triangle ACB \cong \triangle acb$ ist, das $\triangle ABC$ auf das $\triangle abc$, ferner jeder Punkt D vom Bogen ADB auf einen Punkt d des Bogens adb fallen, folglich decken sich auch die Bogen, Abschnitte und Ausschnitte, und sind also congruent.

I. Zusatz. In einem Kreise gehören zu gleichen Centralwinkeln gleiche Sehnen, Bogen, Aus- und Abschnitte.

II. Zusatz. In einem Kreise oder in mehreren Kreisen mit gleichen Radien gehören zu gleichen Sehnen gleiche Centralwinkel und Bogen, gleiche Aus- und Abschnitte. Denn, wenn $AB = FG = ab$ ist, so muss $\triangle ABC \cong \triangle CFG \cong \triangle abc$ (§. 22.), mithin $ACB = GCF = acb$ sein, woraus dann gemäss des Lehrsatzes und des I. Zusatzes das Uebrige folgt. Auch ergibt sich, dass die Senkrechten IC , CH und ch gleich sind, d. h., dass gleiche Sehnen gleichweit vom Mittelpunkte abstehen und umgekehrt; denn es ist

$$\begin{aligned} GI &= AH = ah \text{ (§. 31. Zus. IV.)} \\ GIC &= AHC = ahc = R \\ \text{und } GC &= AC = ac. \end{aligned}$$

Daher $\triangle IGC \cong \triangle AHC \cong \triangle ahc$, (§. 31. Zus. II.),
also $IC = CH = ch$, etc.

III. Zusatz. Zu gleichen Bogen gehören in gleichen Kreisen gleiche Sehnen; denn zu gleichen Bogen gehören gleiche Centralwinkel, und gleiche Centralwinkel haben gleiche Sehnen. (Lehrs.).

IV. Zusatz. Eine gerade Linie CH , die den Centralwinkel halbirt, halbirt auch die Sehne, den Bogen, den Aus- und Abschnitt; denn dass $AH = HB$ ist, folgt aus §. 25. IV. Zus.; und weil $o = n$ ist, liegt das Uebrige im I. Zusatz.

V. Zusatz. Zwei senkrecht sich schneidende Durchmesser theilen die Peripherie und den Kreis in vier congruente Theile; man nennt sie Quadranten.

VI. Zusatz. Um einen Bogen ADB zu halbiren, halbire man den, zum Bogen gehörigen, Centralwinkel

durch CD, (§. 23. 2.); dann ist auch Bog. AD = Bog. BD, indem $o = n$ (Zus. I.) ist.

§. 65.

Lehrsatz. Der Centralwinkel ist doppelt so gross, als der Peripheriewinkel, der mit ihm auf demselben Bogen ruht.

Beweis. Es ergeben sich hier drei Fälle. Es fällt nämlich der Mittelpunkt entweder

- | | |
|----------------------------------|-------------------------------|
| 1) in einen Schenkel, oder | } des Peripherie-
Winkels. |
| 2) zwischen beide Schenkel, oder | |
| 3) ausser beide Schenkel | |

ad 1) (Fig. 72.) Thes. $o = 2 x$

Daten. $BC = BD$, folglich $x = y$ (§. 20. Zus. IV.).

Es ist aber $o = x + y$ (§. 39.), mithin

$$\text{auch } o = 2 x$$

ad 2.) (Fig. 73.) Thes. $ADC = 2 ABC$.

Daten. Man ziehe den Diameter BE, so ist

$$y = 2 p \quad (1.)$$

$$z = 2 x \quad (1.)$$

$$\text{Also } y + z = 2 p + 2 x = 2 (p + x), \text{ oder } ADC = 2 ABC.$$

ad 3) (Fig. 74.) Thes. $o = 2 x$.

Daten. Man ziehe den Diameter BE, so ist

$$EDC = 2 EBC \quad (1.)$$

$$m = 2 n \quad (1.)$$

$$\text{Mithin } EDC - m = 2 EBC - 2 n = 2 (EBC - n) \\ \text{oder } o = 2 x.$$

I. Zusatz. (Fig. 75.) Alle Peripheriewinkel x , die auf demselben Bogen CD ruhen, sind

gleich, denn jeder gleicht dem halben Centralwinkel o (Lehrs.).

II. Zusatz. Peripherie-Winkel, die in gleich grossen Kreisen auf gleich grossen Bogen ruhen, sind gleich; denn sie sind Hälften zweier gleichen Centralwinkel.

III. Zusatz. (Fig. 75.) Jeder Peripherie-Winkel m , der auf dem Halbkreise oder Diameter ruht, ist ein rechter;

$$\begin{aligned} \text{denn} \quad m &= \frac{1}{2} \text{ AKB (Lehrs.)} \\ &= \frac{1}{2} (2 \text{ R.}) (\S. 9. \text{Zus. IV.}) \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad m = \text{R.}$$

Diesem gemäss kann man am Ende der Linie AE, ohne sie über E zu verlängern eine Senkrechte EB errichten. Um z. B. (Fig. 45.) in A auf AB eine Senkrechte zu errichten, wähle man oberhalb AB in der Nähe von A den Punkt C, und beschreibe mit AC aus C einen Kreis, der AB in E schneidet. Zieht man nun EC und verlängert sie bis an den Kreisbogen nach D, so ist die von A nach D gezogene gerade Linie die verlangte Senkrechte; denn es ist, diesem Zusatze gemäss, $DAE = \text{R.}$

IV. Zusatz. (Fig. 76.) Die Summe der 2 gegenüberstehenden Winkel eines jeden Viereckes im Kreise ist $= 2 \text{ R.}$

$$\text{Denn } A = \frac{1}{2} \text{ hohl BED}$$

$$C = \frac{1}{2} \text{ erhaben BED (Lehrs.)}$$

$$\begin{aligned} \text{Mithin } A + C &= \frac{1}{2} [\text{hohl BED} + \text{erhaben BED}] \\ &= \frac{1}{2} (4 \text{ R.}) (\S. 10. \text{Zus. II.}), \end{aligned}$$

$$\text{also } A + C = 2 \text{ R.}$$

Eben so lässt sich zeigen, dass $B + D = 2 \text{ R}$ ist.

§. 66.

Lehrsatz. Jeder Winkel, den an der Peripherie eine Sehne mit der Tangente bildet, ist einem Peripheriewinkel gleich, der auf dem Bogen ruht, den die Sehne zwischen sich und der Tangente abschneidet.

Beweis. (Fig. 77.) Man ziehe den Diameter BE und auch EC, so ist

Thes. $x = y$.

Daten. Denn es ist $x + o = R$. (§. 59. Zus.)

$o + y = R$. (§. 40. Zus. III.)

Also $x + o = o + y$ und

$x = y$.

Zusatz. Dasselbe gilt auch für den stumpfen Winkel $FBC = m$.

Denn $FBC + x = 2 R$ (§. 10.)

$y + m = 2 R$. (§. 65. Zus. IV.)

Mithin $FBC + x = y + m$ und

da $x = y$ (Lehrs.), so ist auch

$FBC = m$.

§. 67.

Lehrsatz. Wenn zwei Sekanten (§. 15. a.) außerhalb des Kreises sich schneiden, so ist der Winkel, den sie bilden, dem Unterschiede zweier Peripheriewinkel gleich, die auf den beiden Bogen ruhen, welche die Secanten zwischen sich abschneiden.

Beweis. (Fig. 78.) Man ziehe DC, so ist

Thes. $x = o - n$.

Daten. Denn es ist $x + n = o$ (§. 39.), woraus

$x = o - n$ ist.

Zusatz. Schneiden sich zwei Sehnen im Kreise, so ist der dadurch entstehende Winkel m gleich der Summe zweier Peripherie-Winkel, die auf den Bogen ruhen, welche die Schenkel des Winkels, rückwärts und vorwärts verlängert, zwischen sich abschneiden, d. i. wenn man DC zieht, $m = o + y$ (§. 39.).

§. 68.

Aufgabe. Eine Tangente zu ziehen.

a.) durch einen gegebenen Punkt in der Peripherie A (Fig. 79.).

Auflösung. Man ziehe den Radius AB , und errichte in A auf AB die Senkrechte AC (§. 45. oder §. 65. Zus. III.), welche dann die Tangente ist (§. 59.).

b.) Durch einen gegebenen Punkt C ausserhalb des Kreises. (Fig. 79.).

Auflösung. Man ziehe BC , halbire sie in D , und beschreibe einen Kreis mit DB . Zieht man nun AC oder EC , so sind diese Tangenten; denn $BAC = R = BEC$ (§. 65. Zus. III. und §. 59.). Es gibt also in diesem Falle 2 Tangenten.

c.) Parallel zu einer der Richtung nach gegebenen Geraden.

(Fig. 70.). Soll zu GH eine Parallele gezogen werden, welche den Kreis berührt, so ziehe man vom Mittelpunkte E auf GH einen senkrechten Durchmesser, so werden die Endpunkte L und P des letzteren die Berührungspunkte sein. Durch L die Senkrechte KL und durch P die Senkrechte PN auf PL gezogen, so werden diese die gesuchten Tangenten sein.

§. 69.

Lehrsatz. Wenn die Peripherie eines Kreises in n gleiche Theile getheilt ist, und man durch alle Theilungspunkte der Ordnung nach Sehnen zieht, so erhält man ein, im Kreise beschriebenes, reguläres n Eck. (§. 60. 1.).

Beweis. (Fig. 80.). Da alle Bogen gleich sind, so sind es auch die Sehnen (§. 64. Zus. III.), oder die Seiten der Figur. Alle Polygons-Winkel stehen auf $n - 2$ solchen gleichen Bogen, sind also gleich (§. 65. Zus. II.), und die Figur ist regulär (§. 14. b.).

Zusatz. Um in einem Kreise ein reguläres Viereck zu beschreiben, errichte man (Fig. 81.) zwei Diameter auf einander senkrecht, und ziehe die Sehnen AC, CB, BD und DA, (§. 64. Zus. V.). Halbirt man jeden Central-Winkel dieses regulären Viereckes ACBD, und zieht man die Sehnen zu den halben Bogen, so erhält man ein reguläres Achteck, und setzt man dieses Verfahren fort, ein reguläres Sechzehneck, Zweiunddreissigeck etc.

§. 70.

Lehrsatz. Wenn man in einem regulären Polygone zwei Winkel an einer Seite halbirt, so ist der Durchschnittspunkt der Halbirungslinien

1.) von allen Ecken }
2.) von allen Seiten } der Figur
gleichweit entfernt, und er heisst der Polygons-Mittelpunkt.

Beweis. (Fig. 80.). Da sowohl A als B $\leq 2 R$ ist, so ist auch $\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B \leq 2 R$; mithin müssen AG

und BG sich schneiden (§. 37. Zus. III.). Es ist $\frac{1}{2} A = \frac{1}{2} B$ (verm. Voraussetzung) oder $o = n$, folglich auch $BG = AG$ (§. 19.). Zieht man GC, GD, GE und GF, so ist

$$AB = BC$$

$$BG = BG$$

$$n = x = \frac{1}{2} B.$$

Also $\triangle ABG \cong \triangle BCG$ (§. 20.)

und $AG = CG = BG$.

Auf ähnliche Art lässt sich zeigen, dass auch GD, GE und GF der Linie AG gleich sind. Es steht also G von allen Ecken der Figur gleichweit ab. Dass G auch von den Seiten (Sehnen) gleichweit abstehe, ergibt sich aus dem Ende des II. Zusatzes §. 64.

I. Zusatz. Wenn man in einem regulären Polygone vom Polygons-Mittelpunkte an alle Ecken der Figur gerade Linien zieht, so wird dadurch das Polygon in so viele congruente Dreiecke getheilt, als es Seiten hat, und jeder Polygons-Winkel wird halbirt. Auch erhält man um den Polygons-Mittelpunkt so viele gleiche Winkel, als die Figur Seiten hat, welche Centralwinkel des Polygons heissen. Jeder davon ist $= \frac{4 \cdot R}{n}$, wenn n die Zahl der Seiten ausdrückt.

II. Zusatz. Jedes reguläre Polygon ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie der Perimeter des Polygons und dessen Höhe die Senkrechte vom Polygons-Mittelpunkte auf eine Seite des Polygons ist, d. h. (Fig. 80.)

$\triangle BGK = ABCDEF$; wenn $BK = 6BC$ ist, (§. 49. Zus. III.).

Denn es ist

$$\triangle BGK = 6 \triangle BGC = ABCDEF.$$

§. 71.

Aufgabe. Um jedes reguläre Polygon und in jedem regulären Polygone einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. (Fig. 80.) Man halbire zwei Winkel an einer Seite, z. B. A und B, so ist GB der Radius des Kreises um das reguläre Polygon, und die Senkrechte GH der Radius des Kreises im regulären Polygone.

Der Beweis beruht auf §. 69 und §. 60.

§. 72.

Lehrsatz. Die Seite eines regulären Sechseckes ist dem Radius des, darum beschriebenen, Kreises gleich.

Beweis. (Fig. 80.) Thes. $AG = AB$.

Daten. Im $\triangle ABG$ ist $AG = GB$, mithin $o = n$ (§. 20. Zus IV.).

$$\text{Es ist } AGB = \frac{4}{6} R = \frac{2}{3} R \text{ (§ 70. Zus. I.)}$$

$$\text{Mithin } o + n = 2 R - AGB \text{ (§. 40.)}$$

$$= 2 R - \frac{2}{3} R$$

$$= \frac{4}{3} R, \text{ oder}$$

$$2 n = \frac{4}{3} R \text{ und}$$

$$n = \frac{2}{3} R = AGB, \text{ mithin auch}$$

$$AG = AB \text{ (§. 21.)}$$

I. Zusatz. Will man ein reguläres Sechseck in einem Kreise construiren, so darf man bloss den Radius des Kreises sechs Mal auf der Peripherie auftragen, und die Sehnen ziehen.

II. Zusatz. Halbirt man jeden Centralwinkel des regulären Sechseckes, und zieht die zu den halben Bogen gehörigen Sehnen, so erhält man ein reguläres Zwölfeck; und, setzt man dieses Verfahren fort, so entsteht ein reguläres Vierundzwanzigeck, Achtundvierzeck etc. (§. 68.)

III. Zusatz. Zieht man (Fig. 80.) im regulären Sechseck die Sehnen AC, AE und EC für die doppelten Bogen, so erhält man ein reguläres Dreieck im Kreise, d. i. $\triangle AEC$ (§. 68.).

§. 73.

Lehrsatz. Der Unterschied zwischen dem halben Bogen und seiner Sehne ist kleiner als der halbe Unterschied, zwischen dem ganzen Bogen und der dazu gehörigen Sehne.

Beweis. (Fig. 82.).

Thes. Bogen AC — AC $\triangleq$ $\frac{1}{2}$ (Bog. AB — AB).

Daten. Bogen AC = $\frac{1}{2}$ Bogen AB.

Man ziehe CB, so ist

$$AC = CB \text{ (§. 64. Zus. III.)}$$

$$\text{und } AC + CB \triangleright AB \text{ (§. 17.)}$$

$$\text{oder } 2AC \triangleright AB \text{ und}$$

$$AC \triangleright \frac{1}{2} AB; \text{ diess von dem Ausdrucke,}$$

$$\text{Bogen AC} = \frac{1}{2} \text{ Bog. AB, subtrahirt, gibt}$$

$$\text{Bogen AC} - AC \triangleq \frac{1}{2} \text{ Bog. AB} - \frac{1}{2} AB, \text{ (denn}$$

wenn man von Gleichem

Ungleiches subtrahirt. so

muss die Differenz mit

dem grösseren Subtra-

henden kleiner ausfallen,

als die Differenz mit dem kleineren Subtrahenden) oder Bog. $AC - AC < \frac{1}{2}$ (Bog. $AB - AB$).

I. Zusatz. Der Umfang eines regulären Polygons von $2n$ Seiten weicht weniger von der Peripherie des umschriebenen Kreises ab, als der eines regulären Polygons von n Seiten. Da man nun die Anzahl der Seiten eines regulären Vieleckes unendlich verdoppeln kann (§. 78. Zus. II.), so ergibt sich, dass der Kreis als ein reguläres Polygon von unendlich vielen Seiten zu betrachten ist.

II. Zusatz. Der Kreis ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie seine Peripherie und dessen Höhe der Radius ist. (§. 70. Zus. II.).

III. Zusatz. Der Kreis-Sector (§. 15. c.) ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie der Bogen, und dessen Höhe der Radius ist. (II. Zus. und §. 49. Zus. III.).

§. 74.

Fragen zur Uebung.

1.) Welche Bedingung muss eine Gerade erfüllen, wenn dieselbe Tangente einer Kreislinie sein soll, und wie kann man durch Construction für einen auf der Peripherie gegebenen Punkt eines Kreises die Tangente finden?

2.) Wie viele Tangenten kann man von einem außerhalb einer Kreislinie angegebenen Punkte aus, an diese ziehen, und in welcher Beziehung stehen die Längen dieser Tangenten sowohl (jene Theile nämlich,

welche zwischen dem gegebenen Punkte und den Berührungspunkten liegen), als auch die Winkel, welche sie mit der vom gegebenen Punkte nach dem Mittelpunkt gezogenen Linie bilden?

3.) In welcher Beziehung stehen Peripherie-Winkel und Centri-Winkel, welche auf gleichen Bogen ruhen, und wie gross ist jener Peripherie-Winkel, von dem der zugehörige Mittelpunkts-Winkel $\frac{4}{5} R$ beträgt?

4.) Wie kann man ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck construiren, von welchem die Grundlinie bekannt ist?

5.) Wie gross ist die Summe der Winkel, den zwei Radien eines Kreises und die durch ihre Endpunkte gezogenen Tangenten mit einander bilden?

6.) Wie kann man um einen Kreis ein Dreieck construiren, dessen Winkel einzeln den Winkeln eines gegebenen Dreieckes gleich sind?

7.) Wie kann man in ein gegebenes Quadrat einen Kreis beschreiben?

8.) Wie kann man näherungsweise einen Kreis in ein ihm gleich grosses Rechteck verwandeln?

VI. Abschnitt.

Von den Verhältnissen der Linien, von der Aehnlichkeit der Figuren und von dem Verhältnisse der letzteren.

§. 75.

Erklärung. Messen heisst angeben, wie oft eine bestimmte Grösse (Mass) in einer anderen gegeb-

nen enthalten ist, oder bestimmen, in welchem Verhältnisse die zu messende Grösse zum Masse steht.

Linien und Flächen stehen nur in so ferne in einem Verhältnisse, als sie gezählte Grössen sind, d. h. als ihre Quantitäten, durch ein gemeinschaftliches Mass in Zahlen bestimmt sind.

Die Masseinheit muss mit der zu messenden Grösse gleichartig sein.

§. 76.

Lehrsatz. Dreiecke von gleichen Höhen verhalten sich zu einander wie ihre Grundlinien.

Beweis. (Fig. 83.)

Thes. $\triangle ABC : \triangle DEF = BC : EF$

Daten. $AG = DH$.

Man wähle eine Länge Bb, mit der sich sowohl BC als EF genau messen lässt (§, 75.), so wird sich finden, dass Bb auf BC, m, und auf EF, n Mal aufgetragen werden kann, folglich

$$BC : EF = m \cdot Bb : n \cdot Bb = m : n.$$

Es ist also durch das Auftragen von Bb die Linie BC in m und EF in n, unter sich gleiche, Theile getheilt. Zieht man nun von diesen Theilungspunkten nach den Spitzen der Dreiecke gerade Linien, so erhält man im $\triangle ABC$ m und im $\triangle DEF$ n kleinere Dreiecke, die weil sie gleiche Grund-Linien und Höhen haben, unter sich gleich sind.

Daher ist $\triangle ABC : \triangle DEF = m : n$. Es ist aber auch $BC : EF = m : n$, folglich

$$\triangle ABC : \triangle DEF = BC : EF.$$

Ist das Verhältniss $m : n$ nicht rational, so nehme

man die Länge Bb so klein an, als nöthig ist, um sich dem rationalen Verhältnisse so viel möglich zu nähern. (Arithm.).

Zusatz. Parallelogramme von gleichen Höhen verhalten sich zu einander wie ihre Grundlinien. (§. 45. Zus. III.). Was für die Hälften gilt, gilt auch für die Ganzen.

§ 77.

Lehrsatz. Dreiecke von gleichen Grundlinien verhalten sich wie die Höhen.

Beweis (Fig. 84.)

Thes. $\triangle ABC : \triangle DEF = AG : DH$.

Daten. $BC = EF$. Man errichte in E auf EF eine Senkrechte, und mache $IE = DH$ und $KE = AG$, ziehe dann IF und KF, so ist: $\triangle KEF = \triangle ABC$ und $\triangle IEF = \triangle DEF$ (§. 49. Zus. II.), und nimmt man IE und KE als ihre Grundlinien an, so haben sie gleiche Höhe EF, und es ist

$\triangle KEF : \triangle IEF = KE : IE$ (§. 76), oder

$\triangle ABC : \triangle DEF = AG : DH$.

Zusatz. Parallelogramme von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen (§. 45. Zus. III.).

§. 78.

Lehrsatz. Alle Dreiecke verhalten sich zu einander wie die Produkte aus ihren Grundlinien und Höhen.

Beweis. (Fig. 85.).

Thes. $\triangle ABC : \triangle DEF = BC \cdot AG : EF \cdot DH$.

Daten. Man errichte $IB = DH$ senkrecht auf BC, und ziehe IC, so ist

$$\triangle ABC : \triangle IBC = AG : IB \text{ (§. 77.)}$$

$$\triangle IBC : \triangle DEF = BC : EF \text{ (§. 76.).}$$

$$\text{Daher } \triangle ABC . \triangle IBC : \triangle IBC . \triangle DEF = AG \times BC : IB \times EF$$

$$\text{oder } \triangle ABC : \triangle DEF = BC . AG : EF . DH.$$

I. Zusatz. Alle Parallelogramme verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundlinien und Höhen. (§. 45. Zus. III.)

II. Zusatz. Von zwei ungleichen Quadraten ist das kleinere im grösseren ebenso oft enthalten, als das Product der kleineren Quadratseite in sich selbst in dem Produkte der grösseren Quadratseite mit dieser letzteren enthalten ist.

Wenn daher das Mass der kleineren Quadratseite a , das der grösseren Quadratseite A ist, so verhält sich

$$a^q : A^q = a^2 : A^2.$$

III. Zusatz. Man nimmt zum Ausmessen der Flächen ein Quadrat als Einheit an, dessen Seite die zugehörige Linieneinheit ist. Wenn daher $a =$ der Linieneinheit $= 1$ wäre, so hätte man

$$a^q : A^q = 1 . 1 : A^2$$

$$\text{also } A^q = A^2 \text{ Quadrateinheiten,}$$

d.h. man erhält den Flächeninhalt eines Quadrates, wenn man eine Seite durch die Linieneinheit misst, und mit sich selbst multiplicirt.

Aus diesem Grunde nennt man das Produkt aus zwei gleichen Factoren, das Quadrat eines dieser Factoren und es ist daher auch für die Rechnung A^q mit

A^2 identisch. Ferner kann man einen Ausdruck von der Form A^2 , worin A die Länge einer Linie bedeutet, immer geometrisch durch das Quadrat darstellen, dessen Seite die Linie A ist.

Alle Beziehungen, welche also bis jetzt von Quadraten über verschiedene Linien gefunden wurden, gelten daher auch von den Quadraten der Linien selbst.

So war im rechtwinkligen Dreiecke, dessen Katheten a und b sind, dessen Hypotenuse c ist;

$a^2 + b^2 = c^2$; daher hat man, wenn man statt dieser Quadrate ihre Flächeninhalte setzt, indem man ihre Seiten durch dieselbe Einheit misst:

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ und } b^2 = c^2 - a^2, a^2 = c^2 - b^2.$$

§. 79.

Lehrsatz. Wenn man in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallellinie zieht, so stehen die abgeschnittenen Stücke der Seiten unter sich und mit dem Ganzen in Proportion.

Beweis. (Fig. 86.)

Thes. 1) $AD : DB = AE : EC$

2) $AB : AD = AC : AE$

3) $AB : DB = AC : EC.$

Daten. $DE \parallel BC.$

ad 1.) Man ziehe BE und DC , und betrachte AD und BD als Grundlinien der beiden Dreiecke ADE und DBE , so ist E ihre gemeinschaftliche Spitze, und sie haben gleiche Höhe. (§. 29. Zus. II.)

Daher $\triangle ADE : \triangle DBE = AD : DB$ [§. 76.] Eben so ist auch $\triangle ADE : \triangle DEC = AE : EC$ [§. 76.]

Mithin $AD : DB = AE : EC$, indem

$\triangle DBE = \triangle DEC$ [§. 49. Zus. II.] ist.

ad 2 und 3.) Aus 1. ergibt sich, dass

$$AD + DB : AD \text{ [oder } DB] = AE + EC : AE \text{ [oder } EC]$$

$$\text{d. i. } AB : AD \text{ [oder } DB] = AC : AE \text{ [oder } EC] *).$$

I. Zusatz. Wenn in einem Dreiecke zu einer Seite mehrere Parallellinien gezogen sind, so stehen die abgeschnittenen Stücke der Seiten in Proportion.

Denn da $DE \parallel FG \parallel BC$ ist, so muss

$$AF : AG = AD : AE = DF : EG \text{ [Lehrs. 2. u. 3.] sein.}$$

Auch ist $AF : AG = FB : GC$ [Lehrs. 1.], mithin

$$AD : AE = DF : EG = FB : GC.$$

II. Zusatz. Wenn man zwei Seiten eines Dreieckes in proportionelle Theile theilt, und die Theilungspunkte durch eine gerade Linie verbindet, so ist diese mit der ungetheilten Seite des Dreieckes parallel; (Fig. 88.) d. i. wenn $AD : AB = AE : AC$ ist, so muss $DE \parallel BC$ sein. Denn, wäre DE nicht $\parallel BC$, so ziehe man durch D eine Parallellinie zu BC , z. B. DF ; dann wäre

$$AD : AB = AF : AC \text{ (Lehrs.). Es ist}$$

aber $AD : AB = AE : AC$ (Dat.); folglich müsste

$AF = AE$ sein, welches nicht möglich ist, wenn nicht F mit E zusammenfällt.

Es muss daher DF mit DE zusammenfallen, und $DE \parallel BC$ sein.

III. Zusatz. Wenn man in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallellinie zieht, so

*) In jeder dieser Proportionen kann man die mittleren und äusseren Glieder verwechseln, die Verhältnisse umkehren, und überhaupt alle Proportions-Gesetze der Arithmetik anwenden.

verhalten sich die Parallelen zu einander, wie die anliegenden Seiten der Dreiecke, wozu sie gehören; d. i. [Fig. 88.] wenn $DE \parallel BC$ ist, so ist

$$\begin{aligned} DE : BC &= AD : AB \\ \text{oder } DE : BC &= AE : AC; \text{ denn, zieht man} \\ DG \parallel AC, \text{ so ist } GC &= DE \text{ (§. 45.), und} \\ GC : BC &= AD : AB \text{ (Lehrs. 3.), oder} \\ DE : BC &= AD : AB \\ \text{und } DE : BC &= AE : AC \text{ [Lehrs. 2.]} \end{aligned}$$

§. 80.

Lehrsatz. Wenn man in einem Dreiecke einen Winkel halbirt, und die Halbirungslinie bis an die gegenüberstehende Seite zieht, so stehen die Stücke dieser Seite mit den beiden andern in Proportion.

Beweis. (Fig. 89.) Thes. $AD : DC = AB : BC$.

Daten. $o = n$. Man verlängere AB so, dass $BE = BC$ wird, und ziehe CE , so ist:

$$\begin{aligned} m &= x \text{ (§. 20. Zus. IV.) und} \\ o + n &= m + x \text{ (§. 39.), oder} \\ 2n &= 2m \text{ und} \\ n &= m, \text{ folglich} \end{aligned}$$

$DB \parallel CE$ (§. 37. I.); mithin

$$AD : DC = AB : BE \text{ [§. 79. 1.] oder}$$

$$AD : DC = AB : BC.$$

Zusatz. (Fig. 89.) Wenn man in einem Dreiecke eine Seite mit den zwei übrigen proportionirt theilt, so halbirt die gerade Linie, vom Theilungspunkte an die gegenüberstehende Spitze gezogen, den Winkel des Dreieckes, d. i. wenn

$AD : DC = AB : BC$ ist, so muss
 $o = n$ sein; denn, verlängert man
 AB, so, dass $BE = BC$ wird, und zieht man CE,
 so ist, da $AD : DC = AB : BC$ ist, auch

$AD : DC = AB : BE$, folglich

$DB \parallel CE$ [§. 79. Zus. II.], also auch

$n = m$ [§. 36. I.], und

$2n = 2m$. Auch ist

$o + n = m + x = 2m$, mithin

$o + n = 2n = n + n$, und

$o = n$.

§. 81.

Lehrsatz. Die gerade Linie, welche die nicht
 parallelen Seiten eines Trapezes halbirt, ist der halben
 Summe der parallelen Seiten desselben gleich.

Beweis. (Fig. 90.) Thes. $EF = \frac{1}{2} (AB + CD)$.

Daten. $AB \parallel CD$, $AE = EC$ und $BF = FD$.

Verlängert man CA und DB, bis sie sich in K
 schneiden, so ist auch $EF \parallel CD \parallel AB$ [§. 79. Zus. II.]

Man ziehe BC, dann EG und HF $\parallel CB$, so ist
 nach §. 79:

$AE : EC = AG : GB$, da aber $AE = EC$ ist, so ist auch

$AG = GB = \frac{1}{2} AB$.

Eben so ist $FD : BF = HD : CH$, da aber $BF = FD$
 ist, so ist auch $HD = CH = \frac{1}{2} CD$.

Es ist aber $EI = GB$ (§. 45.)

oder $EI = \frac{1}{2} AB$, und

$IF = CH$ [§. 45.]

oder $IF = \frac{1}{2} CD$.

Daher $EF = EI + IF = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} CD$

also $EF = \frac{1}{2} (AB + CD)$.

§. 82.

Aufgaben. 1.) Eine gegebene gerade Linie AC (Fig. 87.) nach einem gegebenen Verhältnisse $a : b : c$ zu theilen.

Auflösung und Beweis. Man ziehe AB beliebig, und mache $AD = a$, $DF = b$ und $FB = c$, ziehe von B nach C eine gerade Linie, dann FG und $DE \parallel BC$, so ist:

$$AE : EG : GC = AD : DF : FB \text{ (§. 79. Zus. I.)}$$

$$\text{oder } AE : EG : GC = a : b : c.$$

Zusatz. Werden auf AB lauter gleiche Theile aufgetragen, so werden auch die Theile der gegebenen Linie gleich gross.

Hierauf beruht das Theilen einer Geraden in beliebig viele gleiche Theile.

2.) Zu drei gegebenen geraden Linien a, b, c (Fig. 91.) die vierte geometrische Proportionallinie x zu finden.

Auflösung und Beweis. Man zeichne einen Winkel BAC und mache $AD = a$, $DF = b$, dann $AG = c$, ziehe DG und durch F die Linie FH $\parallel$ DG; so ist:

$$AD : DF = AG : GH \text{ [§. 79. 1.], oder}$$

$ab : c = x$. Es ist also GH die verlangte vierte Proportionale.

Um daher von drei gegebenen Linien die vierte geometrische Proportionale zu finden, setze man zuerst die zu construirende Proportion so an, dass die gesuchte Linie das vierte Glied derselben wird. Sodann trage man die Glieder des ersten Verhältnisses vom Scheitel eines Winkels (der beiläufig grösser als ein

halber Rechter sein soll) auf einen seiner Schenkel der Ordnung nach nebeneinander auf. Vom Scheitel aus trage man nun auf den zweiten Schenkel das dritte Glied der Proportion, verbinde den Endpunkt des letzteren mit dem des ersten Gliedes durch eine Gerade, und ziehe mit dieser vom Endpunkte des zweiten Gliedes aus eine Parallele, so wird das von beiden Parallelen auf dem zweiten Schenkel abgeschnittene Stück die gesuchte vierte geometrische Proportionale sein.

§. 83.

Erklärung. Aehnlichkeit der Figuren ist ihre Uebereinstimmung in Rücksicht der Form oder Qualität. Geradlinige Figuren sind ähnlich:

- a) wenn sie bei gleicher Seitenzahl die Winkel der Ordnung nach gleich haben, und
- b) wenn ihre gleichliegenden Seiten in Proportion stehen.

Das Zeichen der Aehnlichkeit ist $\simeq$.

I. Zusatz. Reguläre Figuren von gleicher Seitenzahl sind ähnlich, denn sie haben gleiche Winkel, und das Verhältniss der Seiten ist gleich.

II. Zusatz. Alle Kreise sind ähnlich. (§. 73. Zus. I.)

§. 84.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Winkel gleich haben.

Beweis. (Fig. 92.) Thes. $\triangle abc \simeq \triangle ABC$.

Daten. $A = a$, $B = b$. Es muss dann auch $C = c$ [§. 40. Zus. II.] sein. Man lege das Dreieck abc auf das Dreieck ABC so, dass die Winkel a und A

aufeinander zu liegen kommen, so wird $b'c' \neq BC$ sein, da $b = B$ ist.

Daher $Ab' : AB = Ac' : AC = b'c' : BC$ [§. 79. Lehrs. und Zus. III.]

oder $ab : AB = ac : AC = bc : BC$, also

$$\triangle abc \approx \triangle ABC \text{ [§. 83.]}$$

I. Zusatz. Sind die drei Seiten eines Dreieckes parallel zu den drei Seiten eines zweiten Dreieckes, so sind beide Dreiecke ähnlich.

Denn die Winkel des einen müssen [nach §. 36. Zus. II.] einzeln denen des anderen Dreieckes gleich sein, folglich sind beide Dreiecke [Lehrs.] ähnlich.

II. Zusatz. Stehen die drei Seiten eines Dreieckes senkrecht auf den Seiten eines zweiten, so sind beide Dreiecke ähnlich.

Denn ist [Fig. 93.] $nH \perp AB$, $mG \perp BC$ und $pF \perp AC$,

so ist $x + r = 2 R$ [§. 10.], ferner

$$x + B = 2 R \text{ [§. 41. Zus. I.]}$$

also $x + r = x + B$, sohin auch

$$r = B, \text{ Eben so ist auch}$$

$$y = A \text{ und}$$

$$z = C$$

folglich $\triangle mnp \approx \triangle ABC$ [Lehrs.]

III. Zusatz. Sind zwei Dreiecke ähnlich, so müssen die gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten in gleichem Verhältnisse stehen. (Folgt unmittelbar aus dem Lehrsatz.)

§. 85.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie einen Winkel gleich haben, und wenn die ihn einschließenden Seiten in Proportion stehen.

Beweis. (Fig. 92.) Thes. $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Dat. $a = A$, und $ab : AB = ac : AC$.

Man lege beide Dreiecke mit den gleichen Winkeln auf einander, so ist, da vermöge Daten

$Ab' : AB = Ac' : AC$ ist, auch

$b'c' \parallel BC$ [§. 79. Zus. II.] folglich ist

$A'b'c' = B$ und $Ac'b' = C$ (§. 36. II.), oder

$b = B$ und $c = C$.

Mithin $\triangle abc \sim \triangle ABC$ [§. 84.]

§. 86.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn darin alle gleichliegenden Seiten in Proportion stehen.

Beweis. [Fig. 93.] Thes. $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Daten. $ab : AB = ac : AC = bc : BC$.

Man mache $AD = ab$, und ziehe $DE \parallel BC$, so ist AD oder $ab : AB = AE : AC$ [§. 79.]. Es ist aber

$ab : AB = ac : AC$ (Dat.)

Mithin $AE = ac$. [Arithm.]

Auch ist : AD oder $ab : AB = DE : BC$ [§. 79.].

Es ist aber $ab : AB = bc : BC$ [Dat.]

also auch

$DE = bc$ [Arithm.]

Es ist also $\triangle ADE \cong \triangle abc$ [§. 22.]

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ [§. 84.]

Mithin $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Zusatz. In ähnlichen Dreiecken stehen proportionirten Seiten auch gleiche Winkel gegenüber.

§. 87.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn darin zwei Seiten in Proportion stehen, und die, den grössern dieser Seiten gegenüberstehenden, Winkel gleich sind.

Beweis. [Fig. 93.] Thes. $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Daten. $a = A$ und $ab : AB = bc : BC$, aber
 $bc > ab$ und $BC > AB$.

Man mache $AD = ab$, und ziehe $DE \parallel BC$, so ist:
 AD oder $ab : AB = DE : BC$. [§. 79. Zus. III.]

Es ist aber $ab : AB = bc : BC$ [Daten.]

Mithin $DE = bc$ [Arithm.]

Es ist also $\triangle ADE \sim \triangle abc$ [§. 31.]. Auch ist

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ [§. 84.],

also auch

$\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Zusatz. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn eine Kathete und die Hypotenuse einander proportionirt sind.

§. 88.

Lehrsatz. Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse eine Senkrechte fällt, so sind

1) die zwei kleineren Dreiecke unter sich und dem ganzen ähnlich, und

2) die Senkrechte ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den abgeschnittenen Stücken der Hypotenuse.

Beweis. [Fig. 94.]

Thes. 1) $\triangle ABD \sim \triangle ABC \sim \triangle ADC$.

2) $BD : AD : DC$

Daten. $BAC = R = o = m$

ad 1) $BAC = o$

$$\underline{x = x}$$

daher auch $y = n$ [§. 40. Zus. II.]

und $\triangle ABC \sim \triangle ABD$ [§. 84.]

Eben so ist $BAC = m$

$$\underline{y = y}$$

also $x = z$ [§. 40. Zus. II.]

ferner $\triangle ABC \sim \triangle ADC$ [§. 84.]

und $\triangle ABD \sim \triangle ADC$ [§. 84.]

ad 2) Da $\triangle ABD \sim \triangle ADC$ ist, so ist auch

$BD : AD = AD : DC$ [§. 84. Zus. III.], oder

$BD : AD : DC$.

I. Zusatz. Jede Kathete des grossen Dreieckes ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der ganzen Hypotenuse und dem ihr anliegenden Stücke, nämlich:

$BD : AB : BC$ [§. 84. Zus. III.], indem $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ und $DC : AC : BC$ [§. 84. Zus. III.], da $\triangle ADC \sim \triangle ABC$ ist.

II. Zusatz. Eine Senkrechte, in irgend einem Punkte auf dem Diameter eines Kreises errichtet, ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abschnitten des Diameters, d. i. [§. 95.]

$BD : AD : DC$,

denn, zieht man BA und AC , so ist $BAC = R$ [§. 65.

Zus. III.],

mithin $BD : AD : DC$ [Lehrs. 2.]

III. Zusatz. Aus den beiden Proportionen des ersten Zusatzes dieses §. ist.

$$AB^2 = BD \cdot BC, \text{ und}$$

$$AC^2 = DC \cdot BC. \text{ Mithin}$$

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= BD \cdot BC + DC \cdot BC = \\ &= (BD + DC) \cdot BC = \\ &= BC \cdot BC = BC^2. \end{aligned}$$

$$\text{Also } AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

d. h. wenn man die Seiten des rechtwinkligen Dreieckes durch einerlei Mass misst (§. 75.), mithin ihre Grösse in Zahlen ausdrückt, so ist die Quadratzahl der Hypotenuse der Summe der Quadratzahlen der beiden Katheten gleich. Man kann daher in jedem rechtwinkligen Dreiecke aus 2 Seiten die dritte durch obige Gleichung finden.

§. 89.

Aufgabe. (Fig. 95.). Zu zwei gegebenen geraden Linien, a und b, die mittlere geometrische Proportionale zu finden.

Auflösung und Beweis.

Man mache $BD = a$ und $DC = b$, halbire BC und beschreibe darüber einen Halbkreis, errichte in D auf BC die Senkrechte AD, so ist diese die verlangte Linie. Denn es ist

$$BD : AD : DC \text{ (§. 88. Zus. II.), oder } a : AD : b.$$

§. 90.

Lehrsatz. Wenn sich in einem Kreise zwei Sehnen schneiden, so bilden die Stücke der einen Sehne

die äusseren, und die der anderen die inneren Glieder einer geometrischen Proportion.

Beweis. Fig: 96. Thes. $AE : CE = ED : EB$.

Daten. Man ziehe AC und BD, so ist

$$o = n \text{ (§. 12. Zus.)}$$

$$x = y \text{ (§. 65. Zus. I.)}$$

Also $\triangle ACE \sim \triangle DEB$ (§. 84.), und daher

$$AE : CE = ED : EB. \text{ (§. 84. Zus. III.)}$$

I. Zusatz. (Fig. 97.) Schneiden sich die Sehnen verlängert ausserhalb des Kreises, so verhalten sich ihre Stücke ausserhalb des Kreises umgekehrt wie die Secanten, d. i.

$AD : AE = AC : AB$; denn zieht man DE und BC so ist

$$p + n = 2 R = n + x \text{ (§. 65. Zus. IV.);}$$

also auch $p = x$. Es ist auch

$$A = A$$

Mithin $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (§. 84.), und

$$AD : AE = AC : AB. \text{ (§. 84. Zus. III.)}$$

II. Zusatz. (Fig. 98.) Schneidet eine Sehne verlängert eine Tangente, so ist diese die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Secante und ihrem Stücke ausserhalb des Kreises, d. i.

$AD : AB : AC$; denn, zieht man CB und DB, so ist

$$A = A$$

$$o = C \text{ (§. 66.).}$$

Also $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ (§. 84.), und

$$AD : AB : AC. \text{ (§. 84. Zus. III.)}$$

§. 91.

Lehrsatz. In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Höhen wie die Grundlinien.

Beweis. (Fig. 99.). Thes. $ad : AD = bc : BC$.

Date. $\triangle abc \sim \triangle ABC$;

folglich $b = B$ (§. 83.), und da auch

$adb = ADB = R$ ist, so ist

$[\triangle adb \sim \triangle ABD$ (§. 84.) und

$ab : AB = ad : AD$. Auch ist

$ab : AB = bc : BC$.

Mithin auch $ad : AD = bc : BC$.

§. 92.

Lehrsatz. Aehnliche geradlinige Figuren werden durch gleichliegende Diagonalen in ähnliche Dreiecke getheilt.

Beweis. (Fig. 100.)

Thes. 1.) $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

2.) $\triangle ace \sim \triangle ACE$.

Dat. $abcde \sim ABCDE$, daher

$b = B$, und

$ab : bc = AB : BC$ (§. 84. Zus. III.)

Also $\triangle abc \sim \triangle ABC$ (§. 85.)

Es muss also auch $bac = BAC$, und

$ac : AC = ab : AB = ae : AE$ sein,
und da

auch $bae - bac = BAE - BAC$, oder

$cae = CAE$ ist, so muss

auch $\triangle ace \sim \triangle ACE$ (§. 85.) sein.

Dass $\triangle ced \sim \triangle CED$ ist, folgt aus Thes. 1. Ueberhaupt gibt es hier nur zweierlei Arten von Dreiecken, die eine Art hat zwei Polygons-Seiten und eine Diagonale, und die zweite zwei Diagonalen und eine Polygons-Seite. Daher die zwei Thesen.

Zusatz. Gleichliegende Diagonalen ähnlicher Polygone verhalten sich wie zwei gleichliegende Polygons-Seiten oder Diagonalen.

§. 93.

Lehrsatz. Die Perimeter ähnlicher Figuren verhalten sich wie zwei gleichliegende Polygons-Seiten oder Diagonalen.

Beweis. (Fig. 100.)

Thes. $\text{perim} : \text{PERIM} = ab : AB = ac : AC$.

Dat. $abcde \sim ABCDE$, also:

$$ab : AB = ab : AB$$

$$bc : BC = ab : AB$$

$$cd : CD = ab : AB$$

$$de : DE = ab : AB$$

$$ea : EA = ab : AB$$

$$\text{ferner } ab : AB = bc : BC$$

$$\text{also } ab + bc : AB + BC = ab : AB = cd : CD,$$

hieraus ist weiter

$$ab + bc + cd : AB + BC + CD = cd : CD = de : DE \text{ etc.}$$

daher

$$ab + bc + cd + de + ea : AB + BC + CD + DE + EA$$

$$= ab : AB,$$

$$\text{oder } \text{perim} : \text{PERIM.} = ab : AB$$

oder $\text{perim} : \text{PERIM.} = ac : AC$ (§. 92. Zus. III.)
etc. etc.

I. Zusatz. (Fig. 101.) Die Seiten und Perimetergleichnamiger regulärer Vielecke verhalten sich wie die Radien oder Durchmesser der darum beschriebenen Kreise, d. i. wenn $abcdef \propto ABCDEF$ ist, so ist:

$$\text{perim.} : \text{PERIM.} = ab : AB = r : R = d : D.$$

Denn es ist

$$\text{perim.} : \text{PERIM.} = ab : AB \text{ (Lehrs.)}$$

$$ab : AB = ah : AH, \text{ weil } \triangle abh \propto \triangle ABH.$$

Mithin

$$\text{perim.} : \text{PERIM.} = ab : AB = ah : AH = r : R.$$

oder

$$\text{perim.} : \text{PERIM.} = 2ah : 2AH = d : D.$$

II. Zusatz. Die Peripherien der Kreise verhalten sich wie ihre Radien oder Durchmesser.

§. 94.

Aufgabe. (Fig. 102.) Aus der Seite eines regulären n Eckes $AB = a$ und aus dem Radius des darum beschriebenen Kreises $AC = r$, die Seite eines regulären $2n$ Eckes $AD = b$, in demselben Kreise zu finden.

Auflösung und Beweis. Man ziehe AC , CB und CD .

Es ist $AE = EB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} a$ (§. 25. Zus. IV.).

$\angle AEC = R = \angle AED$ (§. 25. Zus. IV.), daher

$$AD^2 = AE^2 + ED^2 = \frac{1}{4} a^2 + ED^2 \text{ (§. 88. Zus. III.)}$$

$$ED = CD - CE = r - \sqrt{AC^2 - AE^2} =$$

$$= r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2},$$

$$\text{und } ED^2 = r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2} + r^2 - \frac{1}{4} a^2.$$

$$= 2r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2} - \frac{1}{4} a^2$$

$$\text{oder } ED^2 = 2r (r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2}) - \frac{1}{4} a^2. \text{ Folglich}$$

$$AD^2 = \frac{1}{4} a^2 + 2r (r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2}) - \frac{1}{4} a^2,$$

$$\text{und}$$

$$AD = \sqrt{2r (r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2})}.$$

I. Zusatz. Setzt man $r = a = 1$, d. i. nimmt man a als die Seite eines regulären Sechseckes an (§. 72.), so erhält man die Seite des regulären Zwölfeckes

$$b = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0,51763809 \dots$$

II. Zusatz. Sucht man aus der Gleichung,

$$b = \sqrt{2r (r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2})}$$

den Werth von $a = \frac{b}{r} \sqrt{4r^2 - b^2}$, so hat man die

Formel für die Seite eines regulären n Eckes durch die des regulären $2n$ Eckes und dem Radius des darum beschriebenen Kreises ausgedrückt.

§. 95.

Lehrsatz. Das Verhältniss des Diameters zur Peripherie eines Kreises ist $= 1 : 3,1415 \dots = 1 : \pi$.

Beweis. Man setze den Radius $= 1$, so ist der Perimeter eines im Kreise beschriebenen regulären Sechseckes $= 6$ (§. 72.). Man suche die Seite des regulären Zwölfeckes (§. 94. Zus. I.); sie ist $= 0,517638 \dots$; folglich der Perimeter des Zwölfeckes $= 6,211656 \dots$. Auf ähnliche Art erhält man mit Hülfe des §. 94. den Perimeter des regulären Vierundzwanzigeckes, Achtundvierzigeckes, Sechsendneun-

zigeckes etc. Setzt man dieses Verfahren fort, so ergibt sich der Perimeter eines 768 Eckes $= 6,283...$ Nun ist dieses Vieleck vom Kreise sehr wenig unterschieden (§. 73. Zus. 1.); mithin ist für den Kreis:

$$\text{Diam. : Periph.} = 2 : 6,283 \dots \text{ oder} \\ d : p = 1 : 3,1415 \dots = 1 : \pi.$$

Setzt man, wie oben, die Vervielfachung der Polygonsseiten noch weiter fort, und rechnet man überhaupt mit mehr Decimalstellen, so ergibt sich, dass:

$d : p = 1 : 3,14159265358979323846264338327950288....$ welche letztere Zahl gewöhnlich durch π bezeichnet wird. Sie heisst von ihrem Finder die Ludolphische Zahl. Im Gebrauche bei Berechnungen nimmt man von dieser Zahl nach Erforderniss der grösseren oder geringeren Schärfe mehr oder weniger Decimalstellen*).

§. 96.

Lehrsatz. Aehnliche Dreiecke verhalten sich, ihrem Flächeninhalte nach, wie die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten.

Beweis. (Fig. 99.).

Thes. $\triangle abc : \triangle ABC = bc^2 : BC^2$.

Daten. $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Man ziehe ihre Höhen, ad und AD , so ist:

$$\triangle abc : \triangle ABC = ad \cdot bc : AD \cdot BC \quad (\S. 78.).$$

*) Archimedes fand $d : p = 7 : 22$, und $d : p = 71 : 223$. Ersteres Verhältniss gibt die Peripherie zu gross, letzteres zu klein an. Des Adrian Metius Verhältniss, $113 : 355$, gibt die Peripherie bis auf die siebente Decimalstelle richtig, ist aber sehr unbequem.

nun ist $ad : AD = bc : BC$ (§. 91.),
folglich

$$ad \cdot \triangle abc : AD \cdot \triangle ABC = ad \cdot bc^2 : AD \cdot BC^2,$$

oder

$$\triangle abc : \triangle ABC = bc^2 : BC^2.$$

Zusatz. Es ist $ad : AD = bc : BC$ (§. 91.)

$$\text{also } ad^2 : AD^2 = bc^2 : BC^2 \text{ (Arithm.);}$$

$$\text{aber } \triangle abc : \triangle ABC = bc^2 : BC^2 \text{ (Lehrs.),}$$

$$\text{also } \triangle abc : \triangle ABC = ad^2 : AD^2,$$

d. h. ähnliche Dreiecke verhalten sich zu einander, wie die Quadrate der zu gleich liegenden Grundlinien gehörigen Höhen.

§. 97.

Lehrsatz. Aehnliche geradlinige Figuren verhalten sich wie die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten oder Diagonalen.

Beweis. (Fig. 100.)

$$\text{Thes. } abcde : ABCDE = ab^2 : AB^2 = ac^2 : AC^2.$$

Daten. $abcde \sim ABCDE$.

Man theile beide Figuren durch gleichliegende Diagonalen in Dreiecke. Diese sind ähnlich (§. 92.).

Daher

$$\triangle abc : \triangle ABC = ac^2 : AC^2 = ab^2 : AB^2 \text{ (§. 96.)}$$

$$\triangle ace : \triangle ACE = ac^2 : AC^2 = ab^2 : AB^2 \text{ (§. 96. und §. 92. Zus.)}$$

$$\triangle ced : \triangle CED = ce^2 : CE^2 = ab^2 : AB^2 \text{ (§. 96. etc.),}$$

folglich

$$\triangle abc + \triangle ace + \triangle ced : \triangle ABC + \triangle ACE + \triangle CED = ab^2 : AB^2$$

$$\text{oder } abcde : ABCDE = ab^2 : AB^2$$

$$abcde : ABCDE = ac^2 : AC^2, \text{ etc.}$$

I. Zusatz. Reguläre Figuren von gleicher Seitenzahl, verhalten sich wie die Quadrate der Radien oder Diameter der darumbeschriebenen Kreise; denn in Fig. 101. ist:

$$abcdef \propto ABCDEF \text{ (§. 83. Zus. I.). Es ist also}$$

$$abcdef : ABCDEF = ab^2 : AB^2 \text{ (Lehrs.). Auch ist}$$

$$ab^2 : AB^2 = r^2 : R^2 = d^2 : D^2 \text{ (§. 93. Zus. I.)}$$

Mithin

$$abcdef : ABCDEF = r^2 : R^2 = d^2 : D^2.$$

II. Zusatz. Alle Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien oder Diameter, also auch wie die Quadrate ihrer Peripherien (Zus. I. und §. 83. Zus. II.).

III. Zusatz. Beschreibt man über die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes ähnliche Vielecke, so ist das Vieleck über die Hypotenuse so gross, als die Summe der Vielecke über beide Katheten.

Denn ist A das über die Kathete a beschriebene Vieleck, dem das Vieleck B, das über die Kathete b und das Vieleck C, das über die Kathete c beschrieben, ähnlich ist, so hat man

$$A : B = a^2 : b^2 \text{ (Lehrs.),}$$

$$\text{also } A + B : A = a^2 + b^2 : a^2$$

$$\text{oder } A + B : A = c^2 : a^2 \text{ (§. 52.),}$$

$$\text{ferner } C : A = c^2 : a^2 \text{ (Lehrs.), also hat man,}$$

wenn die beiden letzten Proportionen in eine verwandelt werden:

$C : A = A + B : A$, mithin
 $A + B = C$.

IV. Zusatz. Beschreibt man über die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes regelmässige Vielecke von gleicher Seitenzahl, so dass jene Seiten Durchmesser werden, so ist das Vieleck über die Hypotenuse der Summe der Vielecke über beide Katheten gleich. — Denn regelmässige Polygone von gleicher Seitenzahl sind ähnlich (§. 83.), und daher ist hier Zus. III. anwendbar.

Beschreibt man über die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes ganze oder halbe Kreise, so ist die Summe der ganzen oder halben Kreise über beide Katheten so gross, als der ganze oder halbe Kreis über die Hypotenuse.

Anmerkung. Auf die in den Zusätzen III. und IV. enthaltenen Beziehungen ähnlicher Dreiecke und regelmässiger Figuren, gründet sich das Verfahren:

a.) Ein Polygon zu finden, das zweien gegebenen ähnlich, und so gross ist, als die Summe oder Differenz dieser beiden. —

b.) Zwei oder mehrere ähnliche Polygone in ein einziges zu verwandeln, dessen Flächeninhalt so gross, als die Summe der Flächeninhalte der gegebenen.

c.) Die Seite eines Polygons zu finden, das zwei-, dreimal etc. grösser, als ein gegebenes, und diesem ähnlich ist.

d.) Den Radius eines Kreises zu finden, der so gross als die Summe zweier oder mehrerer gegebener Kreise, oder welcher der Differenz zweier gegebenen Kreise gleich ist.

e.) Einen Kreis zu finden, der zwei-, drei- oder viermal so gross ist, als ein gegebener Kreis.

§. 98.

Fragen zur Uebung.

1.) In welchem Verhältnisse stehen Rechtecke von gleichen Höhen zu einander?

2.) Wie verhalten sich ein Dreieck und ein Parallelogramm zu einander, wenn beide gleiche Höhen, wie aber, wenn sie auch gleiche Grundlinien haben?

3.) Wie oft ist ein Rechteck in einem anderen enthalten, wenn die Höhe des ersten $\frac{2}{3}$ der Höhe des zweiten, die Grundlinie des letzteren aber $2\frac{1}{3}$ mal so gross, als die vom ersten Rechtecke ist?

4.) Wie oft kann ein Quadrat in ein Rechteck gelegt werden, wenn seine Seite m mal in der Grundlinie und n mal in der Höhe des Rechteckes enthalten ist; wie oft ist aber dasselbe Quadrat in einem Dreiecke enthalten, das mit jenem Rechtecke gleiche Grundlinie und Höhe hat?

5.) Wenn in einem Dreiecke von einem Punkte einer Seite aus, der $\frac{1}{3}$ der letzteren von der Spitze absteht, mit einer anderen eine Parallele gezogen wird; in welchem Verhältnisse stehen die Theile der dritten Seite, wie verhalten sich beide Parallelen zu einander und wie verhält sich das ganze Dreieck zum kleinen Dreiecke?

6.) Auf welchen Satz ist die Aehnlichkeit der Dreiecke gegründet, und unter welchen Bedingungen werden zwei Dreiecke ähnlich sein?

7.) Wie kann man ein Dreieck construiren, von dem eine Seite gegeben ist, und das einem anderen Dreieck ähnlich sein soll?

8.) Wenn ein Dreieck, dessen Seiten und Winkel bekannt sind, einem Dreiecke ähnlich ist, von dem nur eine Seite bekannt ist, wie kann man die übrigen Bestimmungstücke dieses zweiten Dreieckes finden?

9.) Wie findet man die vierte geometrische Proportionale dreier Linien, und wie die mittlere aus zwei Linien?

10.) Wie kann man über eine gegebene Seite ein Fünfeck construiren, das einem gegebenen ähnlich ist?

11.) Wie gross ist der Perimeter des regulären Vierundzwanzigeckes in einem Kreise, dessen Halbmesser gleich 1 ist?

12.) Wenn ein Dreieck den Flächeninhalt m hat, und seine Seiten einzeln n mal so gross sind, als die eines zweiten Dreieckes; wie gross ist der Flächeninhalt des letzteren?

13.) In welchem Verhältnisse stehen die Flächeninhalte zweier Kreise, deren Radien m und n sind; wie gross ist der Radius jenes Kreises, der denselben Flächeninhalt hat, wie jene zusammengenommen; und wie verhält sich sein Flächeninhalt zum Inhalte des Kreises vom Halbmesser m . —

14.) Wie gross ist der Radius eines Kreises, dessen Flächeninhalt so gross ist, als jener der Kreise von den Halbmessern m , n , p , q , und r zusammengenommen?

15.) Wie kann man den Satz: „In jedem Parallelogramme $ABCD$ (Fig. 59.) sind die um die Diagonale liegen-

den Parallelogramme GF und HE dem ganzen Parallelogramme und unter sich ähnlich“, beweisen? —

VII. Abschnitt.

A. Messung der geraden und Kreis-Linien, sowie auch der Winkel.

§. 99.

Erklärung. a) Nach §. 75. heisst Messen nichts anderes, als angeben, wie oft eine bestimmte Grösse (Mass) in einer anderen gegebenen enthalten ist. Das Mass ist die Einheit, womit man die zu messende Grösse vergleicht, um ihr Verhältniss zu dieser Einheit durch eine Zahl auszudrücken. Es muss stets das zu messende mit dem Masse gleichartig sein.

Das gewöhnliche Mass für Linien (Längenmass) ist der Fuss oder Schuh (zuweilen auch die Ruthe), eine Länge, die zwar in verschiedenen Gegenden verschieden, aber jedesmal als bekannt vorausgesetzt ist.

Die Eintheilung des Fusses ist zweifach, entweder

1.) geometrisch, oder zehntheilig, daher Decimalmaass. Nach dieser theilt man den Fuss in 10 Zoll, den Zoll in 10 Linien und die Linie in 10 Scrupel oder Punkte. Zehn Fuss geben eine geometrische Ruthe;

2.) oder zwölftheilig, daher Duodecimalmass.

Hier theilt man den Fuss in 12 Zoll, den Zoll in 12 Linien, und die Linie in 12 Scrupel

oder Punkte. Zwölf Fuss geben eine Duodecimalruthen.

Man bezeichnet Ruthen mit $^{\circ}$, Fuss mit $'$, Zoll mit $''$, Linien mit $'''$, Scrupel oder Punkte mit $''''$ oder iv , welche Zeichen man rechts über die Zahlen setzt. So heisst z. B. $3^{\circ} 2' 5'' 6''' 4''''$ drei Ruthen, 2 Schuh, 5 Zoll, 6 Linien und 4 Scrupel.

Folgende Tabellen geben einen allgemeinen Ueberblick über die

Eintheilung des Längemasses.

a. Decimalmass.

Fuss.	Zoll.	Linien.	Scrupel.
$1'$	10.	100.	1000.
	$1''$	10.	100.
		$1'''$	10.
			$1''''$

b. Duodecimalmass.

Fuss.	Zoll.	Linien.	Scrupel.
$1'$	12.	144.	1728.
	$1''$	10.	144.
		$1'''$	12.
			$1''''$

Eine Linie messen, heisst ihre Länge durch Ruthen, Fuss, Zoll etc. angeben. Bei geometrischen Berechnungen nimmt man gewöhnlich das Decimalmass.

Ein Körper, worauf das Längenmass mit seinen Unterabtheilungen gezeichnet ist, heisst ein Massstab (a).

Der alte Pariser Fuss (pied du Roi) wird nach der Duodecimaleintheilung in 144 Pariserlinien getheilt; von diesen nimmt man noch Zehntel, Hundertel u. s. w. Das Verhältniss des Bayerischen zu diesem Pariserfuss ist $\approx 1000 : 1113$.

b.) Das neue französische Längemass ist der Mètre (mètre définitif), der zehnmillionste Theil des Quadranten des Erdmeridians und ist $\approx 3' 11,296''$ Parisermass. Die weitere Eintheilung des Mètre ist: Decimeter, Centimeter, Millimeter, d. i. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ und $\frac{1}{1000}$ des Mètre; ferner Decamètre, Hectomètre, Kilomètre, Myriamètre, d. i. 10, 100, 1000, 10000 Mètres.

Anmerk. Der Mètre ist ein gesetzlich bestimmter Theil der Toise du Pérou, welcher nur näherungsweise, nicht aber genau dem zehnmillionsten Theil des Erdquadranten gleich ist. Das neue conventionelle französische Mass unterscheidet sich von der Toise nur durch die bequemere Eintheilung, wesshalb es auch passender

(a) Der Ausdruck **Massstab** kann im Allgemeinen zweierlei Bedeutung haben:

- 1) Kann derselbe die geometrische Figur sein, auf welcher die Längeneinheit und ihre Unterabtheilungen getragen sind, um sie beim Messen einer Linie abnehmen zu können.
- 2) Kann derselbe das Verhältniss zwischen einer Länge in einer Zeichnung und der natürlichen Länge der entsprechenden Linie bedeuten. Im letzteren Falle heisst er auch **Verjüngung**.

gewesen wäre, die Decimaleintheilung auf die Toise anzuwenden als eine neue Masseinheit einzuführen.

§. 100.

Aufgaben. 1) Was geben 15° Duodecimalmass im Decimalmasse ausgedrückt?

1.) Auflösung. Da $1^{\text{duod. } 0} = 12'$ und $1^{\text{dec. } 0} = 10'$ ist,

so ist $15^{\text{dd. } 0} : x^{\text{d. } 0} = 10 : 12$,

woraus $x = 18^{\circ}$ Decimalmass ist.

2.) Auflösung. Da $1^{\text{duod. } 0} = 12'$ und $1^{\text{dec. } 0} = 10'$ ist,

so muss $1^{\text{dd. } 0} : 1^{\text{d. } 0} = 12 : 10$ und

$10^{\text{dd. } 0} = 12^{\text{d. } 0}$ sein; folglich ist

$10^{\text{dd. } 0} : 12^{\text{d. } 0} = 15^{\text{dd. } 0} : x^{\text{d. } 0}$, oder

$10 : 12 = 15 : x$ und

$x = 18^{\circ}$ Decimalmass.

2.) Was geben $3'' 6'''$ Decimalmass im Duodecimalmasse?

Auflösung. Es ist $3'' 6''' = 36'''$ Decimalmass, und

$36^{\text{d. } '''} : x^{\text{dd. } '''} = 100 : 144$, woraus

$x = 51,84'''$ Duodecimal-

mass,

oder $x = 4'' 3''' 10''''$, „

3.) Was geben $3^{\circ} 1' 6''$ Duodecimalmass im Decimalmasse?

Auflösung. Es ist $3^{\circ} 1' 6'' = 450''$ Duodecimalmass, und $450^{\text{dd. } ''} : x^{\text{d. } ''} = 12 : 10$, woraus

$x = 375''$ Decimalmass oder

$= 3^{\circ} 7' 5''$ „ ist.

Zusatz. Will man Duodecimallängenmass in Decimalmass verwandeln, so bringe man entweder alle Einheiten auf den Fuss zurück (nach arithm Regeln), indem man die Linien durch 144, die Zoll durch 12

dividirt die Ruthen mit 12 multiplicirt, und die hierdurch erhaltenen Zahlen addirt, und die Reduction ist hierdurch schon vollzogen, indem der Fuss in beiden Eintheilungen derselbe ist. Man kann sodann die erhaltene Anzahl Fusse in Zoll und Linien Decimalmass verwandeln, indem man durch 10 oder 100 multiplicirt, und in Ruthen, indem man durch 10 dividirt.

Oder man bringe die gegebenen Masse auf die niedrigste in denselben vorkommende Einheit, also auf Zoll oder Linien etc. (die Fusse bleiben immer unverändert), und multiplicire sodann die erhaltene Zahl mit $\frac{10}{12}$ oder $\frac{100}{144}$, so erhält man die gleichnamigen Einheiten, nämlich beziehungsweise Zoll und Linien im Decimalmasse. So geben also $n^{dd.} = \frac{10}{12} n^{d.}$; $n^{dd.} = \frac{100}{144} n^{d.}$ etc.

Bei der Verwandlung von Decimalmass wird man nur ganz einfach die angegebene Zahl als Decimalbruch anschreiben, in welchem die Fusse als Ganze stehen, und diesen Decimalbruch in Ruthen, Zoll, Linien etc. dadurch verwandeln, dass man ihn beziehungsweise mit 12 dividirt, oder durch 12, 144 etc. multiplicirt.

Bei allen diesen und den folgenden Reductionen zeigt sich der Gebrauch der Logarithmen von grossem Vortheil.

4.) Was geben 423,2 pariser Fuss im bayerischen Masse?

Auflösung. Es ist $423,2^{p.} : x^{b.} = 1000 : 1113$ (§. 99.)

daher $x = 471,01$ bayerische Fuss.

4.) Was geben 5000 Mètre im bayer. Masse?

Auflösung.

Es ist: Pariser Fuss : Mètre = 1 : 3,078444 (§. 99. b.)

und bayer. Fuss : paris. Fuss = 1000 : 1113 (§. 99.)

Daher bayer. Fuss : Mètre = 1000 : 1113.3078444

= 1 : 3,4263 ;

folglich: 5000^{m.} : x^{b.} = 1 : 3,4263

und x = 17131,5 Bayer. Fuss.

Zusatz. Um Pariser Fusse in Bayerische zu verwandeln, hat man nur die Anzahl der Pariser Fusse mit der Zahl $\frac{1113}{1000}$, um aber Bayer. Fusse in Pariser zu verwandeln, hat man die gegebene Anzahl Bayerische Fusse mit $\frac{1000}{1113}$ zu multipliciren. — Will man Mètres in Bayer. Fuss verwandeln, so multiplicire man die Anzahl der Mètres mit 3,4263, will man aber Bayerische Fusse in Mètres verwandeln, so dividire man die Anzahl der Fusse durch 3,4263 — Ueberhaupt ist es von grossem Vortheil, wenn man für solche Verwandlungen von Massen, die sich oft wiederholen, den Reductionsfactor aufsucht. Man darf sodann mit diesem nur die gegebene Anzahl von Einheiten multipliciren oder dividiren, um die verlangte Reduction zu bewerkstelligen. —

Aufgaben zur Uebung.

1.) Was geben 6° 2' 7" 8''' 5'''' Decimalmass im Duodecimalmasse?

2.) Was betragen 24° Decimalmass im Duodecimalmasse?

3.) Was geben 1° 1' 2" 8''' Duodecimalmass im Decimalmasse?

4.) Wie viel betragen 100 Bayerische Fuss nach dem Wiener Fussmasse, wenn ein Bayer. Fuss = 129,38 und ein Wiener Fuss = 140,13 Pariser Linien ist?

5.) Was geben 400' Bayerisches Mass im Pariser Mass?

6.) Was geben $112^{\circ} 7' 8''$ Bayer. Duodecimaimass im Pariser Masse?

7.) Was geben 236 Bayer. Fuss in Mètre?

8.) Was betragen 230,7 Mètre im Bayer. und was im Pariser Masse?

§. 101.

Aufgabe. Einen Massstab zu verfertigen.

Auflösung. (Fig. 103.) Man ziehe AB und trage darauf mehrere gleiche Theile AE, EB etc. auf. In A, E, B etc. errichte man auf AB Senkrechte (§. 25. 1.), und gebe ihnen beliebige, aber unter sich gleiche, Längen $AC = EF = BD$ etc. Man theile AC, beim Decimalmasse in 10, und beim Duodecimalmasse in 12 gleiche Theile, und ziehe durch alle Theilungspunkte Parallelen zu AB (§. 38); setze auch an AC oder EF die Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. Eben so theile man AE und CF in 10 der 12 gleiche Theile. Endlich setze man an den Punkt E eine Nulle, an den ersten Theilungspunct von F gegen C die Zahl 10, an den zweiten unterhalb 20, an den dritten oben 30 etc. (wie Fig. 103.). Dann ziehe man gerade Linien von 0 bis 10, von a bis b, von 20 bis 30, von c bis d etc., so ist der Massstab vollendet.

Beweis. Man nehme an, $AE = 100'$, so ist

$$Ea = F10 = \frac{1}{10}AE = 10'.$$

Ebenso ist $E20. = 2.Ea = \frac{2}{10}AE = 20'$ etc.

Nun ist $EF : E1 = F10 : 1g$ (§. 79. Zus. III.)

Es ist aber $E1 = \frac{1}{10} EF$ (Construct.); folglich auch $1g = \frac{1}{10} F10 = 1'$. Ebenso ist $EF : E6 = F10 : 6h$, (§. 79. Zus. III.) und da $E6 = \frac{6}{10} EF$ (Construct.) ist, so muss auch $6h = \frac{6}{10} F10 = 6'$ sein etc.

Diesem zu Folge ist:

$1k = kg + gl = Ea + gl = 10' + 1' = 11'$,
und
 $6l = 36'$, dann $mh = 100' + 6' = 106'$ und
 $ml = 136'$ etc.

I. Zusatz. Beträgt die Länge des Masstabes 10 AE, so heisst er ein tausendtheiliger.

II. Zusatz. In Bayern is es gewöhnlich, dem tausendtheiligen Massstabe die Länge eines ganzen oder halben Bayerischen Schuh, mithin jeder Abtheilung wie AE, EB etc. die Länge eines ganzen oder halben Bayerischen Decimalzolles zu geben.

III. Zusatz, Will man die Länge einer geraden Linie auf dem Papiere messen, so fasse man sie mit dem Zirkel, und untersuche ihr Mass durch das gehörig Anlegen dieser Zirkelöffnung an den Massstab. —

Da das in diesem Paragraphe enthaltene mit der Anwendung der geometrischen Sätze auf die Zeichnungskunst und Topographie sehr nahe zusammenhängt, so mag auch hier der Ort sein, wo einige Bemerkungen über die Wahl des Massstabes und seinen Gebrauch nicht überflüssig sein könnten. Es mag daher hierüber Folgendes berührt werden.

Anmerkung I. 1.) Der zum Messen bestimmter Längen benützte Massstab ist in den meisten Fällen kleiner als der für die natürlichen Längen angewandte.

Soll von einer Figur für irgend einen Zweck ein Bild entworfen werden, welches über die Gestalt und den Inhalt jener Figur genauen Aufschluss geben soll, so ist es nicht nothwendig, dass dieses Bild denselben Raum einnimmt, wie die Figur selbst. Man wird den Zweck schon erreichen, wenn das Bild der natürlichen Figur nur ähnlich ist.

2.) Damit eine Zeichnung der natürlichen Figur dieser ähnlich werde, müssen nicht allein die Winkel jenes Bildes den Winkeln der Figur einzeln gleich sein, sondern es müssen auch die Seiten beider Figuren in Proportion stehen. (§. 83.).

Es müssen daher die Seiten des Bildes mit den Seiten der natürlichen Figur in einem gewissen unveränderlichen Verhältnisse stehen. Diese Verhältnisszahl ist die Verjüngung der natürlichen Figur, und ist durch den bei der Verzeichnung des Bildes gewählten Massstab gegeben. So sagt man z. B. die Verjüngung oder der Massstab beträgt $\frac{1}{1000}$, wenn 1000 Einheiten der natürlichen Länge einer Linie durch eine Einheit in dem Bilde dargestellt sind. Also 1000 Fuss durch die Länge eines Fusses, geben für 100 Fuss einen Zoll und für 10 Fuss eine Linie etc.

Immer ist die Verjüngung durch einen Bruch angegeben, dessen Zähler die Einheit ist, und dessen Nenner anzeigt, wie viele Einheiten der natürlichen Länge durch eine Einheit einer Länge im Bilde ausgedrückt sind.

3) Die Wahl des Massstabes richtet sich immer nach dem Zwecke, für welchen das Bild entworfen wird.

Immer hat man aber zwei Umstände (welche aus

Grundsätzen der Optik hervorgehen) in Betracht zu ziehen. Es muss nämlich a.) die kleinste Länge, welche man noch mit blosssem Auge erkennen will, eine solche Ausdehnung haben, dass sie in der normalen Sehweite (etwa 8'' vom Auge entfernt) noch deutlich wahrgenommen wird. Wenn man also z. B. vom Bilde keine grössere Genauigkeit wünscht, als in demselben nur noch 100' genau zu erkennen, so wird die kleinste im Massstab noch angegebene Länge 100 Fuss einer natürlichen Länge vorstellen, und wenn jene Länge ein Scrupel wäre, so würde man $\frac{1}{100000}$ als Verjüngung haben.

b.) Eine kleine Länge wird ohngefähr in der 3000-fachen Entfernung ihrer Grösse vom Auge, nicht mehr zu erkennen sein.

Sollte also ein Scrupel die kleinste noch wahrnehmbare Einheit sein, so hätte man für 3000^{IV} natürlicher Länge 800 Scrupel im Bilde zu nehmen, also für 15^{IV} natürlicher Länge 4^{IV} im Bilde. Dieses gibt beiläufig für 40''' natürlicher Länge eine Linie.

Der Sicherheit halber nimmt man das Doppelte, also $\frac{1}{20}$ '''

Will man also im Bilde 1 Fuss noch deutlich erkennen, so müssen

1' natürlicher Länge durch $\frac{1}{20}$ ''' im Bilde
also 2000''' " " " 1''' "

dargestellt sein, und der Massstab ist sodann $\frac{1}{2000}$.

Wegen der Unsicherheit des Abnehmens von Längen mittelst des Zirkels nimmt man die Grenzen der Genauigkeit zwischen $\frac{1}{12}$ bis $\frac{1}{15}$ ''' für die kleinste mit blosssem Auge noch wahrnehmbare Länge an.

Mit Benützung dieser Anhaltspunkte ist es also

möglich, für irgend einen gegebenen Zweck den Massstab gehörig zu wählen.

Vorübergehend kann bemerkt werden, dass man für Arbeitszeichnungen keine Verjüngung nimmt; für Maschinen beiläufig $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$; für Baurisse $\frac{1}{100}$ — $\frac{1}{50}$ etc.; für ökonomische Aufnahmen $\frac{1}{2500}$ — $\frac{1}{1000}$, für Steuer-, Forstkarten, Bodenkarten etc. $\frac{1}{5000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{20000}$ etc.; für topographische Aufnahmen, Recognoscirungen $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{20000}$, $\frac{1}{25000}$ etc. als Massstab nimmt.

4) Die Massstäbe, welche in der Anwendung vorkommen, und einigermaßen richtige Masse beständig angeben sollen, sind aus irgend einem Metall, gewöhnlich aus Messing, Neusilber, zuweilen befindet sich die Theilung auch auf Glas, selten auf Holz oder Papier. — Das Eingraviren der Masse geschieht durch das Reisswerk einer Theilmaschine. Mittels solcher Vorrichtungen kann man noch kleinere Unterabtheilungen der Einheit einzeichnen, als mit blossem Auge wahrgenommen werden können. Zum Ablesen solcher Theile bedient man sich der Loupen und Mikroscope.

In vielen Fällen wendet man um noch kleinere Theile, als ein Massstab unmittelbar angibt, ablesen zu können, den Nonius oder Vernier an.

Es ist diess ein kleiner Massstab, der mit dem gegebenen so verbunden ist, dass seine einzelnen Theilstriche an beliebige Theile des letzteren verschoben werden können.

Die Länge des Nonius ist gewöhnlich um 1 mehr oder weniger jener Theile der niedersten Einheit des Massstabes, als den wie vielen Theil der letzteren man noch ablesen will. Will man z. B. einen Massstab, der in Fuss, Zoll und Linien getheilt ist, mit einem Nonius

versehen, der noch $\frac{1}{10}'''$ anzugeben gestattet, so trägt man auf den Nonius entweder eine Länge von 9 Linien oder eine Länge von 11 Linien auf, und theilt diese Länge in 10 gleiche Theile. Ein Noniustheil beträgt sodann im ersten Falle $\frac{9}{10}''' = 1''' - \frac{1}{10}'''$, im letzteren Falle aber $\frac{11}{10}''' = 1''' + \frac{1}{10}'''$; zwei solche Theile betragen bei der ersten Anordnung $\frac{18}{10}''' = 2''' - \frac{2}{10}'''$, bei der zweiten Anordnung hingegen $\frac{22}{10}''' = 2''' + \frac{2}{10}'''$ etc. etc.

Dieser längst des ganzen Massstabes (Limbus) verschiebbare kleine Massstab gibt nun auf eine sehr einfache Weise, noch $\frac{1}{10}'''$, $\frac{2}{10}'''$, $\frac{3}{10}'''$ etc. an.

Ist nämlich [Fig. 178.] AB ein in gleiche Theile getheilter Massstab, ferner $ab = 9\ mn$, wobei $mn = 01 = 1\ 2$ etc. den Unterabtheilungen des Massstabes gleich ist, und $o\ I = I\ II = II\ III$ etc. $= IX\ X = \frac{1}{10} ab = \frac{9}{10} mn$, so ist $cIX = mn - \frac{9}{10} mn = \frac{1}{10} mn$, $dVIII = 2mn - \frac{18}{10} mn$, also $dVIII = \frac{2}{10} mn$, $eVII = \frac{3}{10} mn$ etc.

Wenn man also den Nonius an den Massstab so anlegt, dass beide eine Linie [0, 10.] gemein haben, und zwei Theilstreiche derselben in eine gerade Linie fallen, z. B. wie hier, der erste des Massstabes und der letzte des Nonius, und der erste des Nonius und der letzte des Massstabes, so werden die Räume zwischen den einzelnen aufeinander folgenden Theilstrichen beider Massstäbe $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ etc. bis $\frac{9}{10}$ eines Theiles des Massstabes sein. Will man daher z. B. die Länge der Linie MN messen, so lege man den Massstab an dieselbe an, und findet sodann $MP = 5mn$; liest man sodann die Theilpunkte des Nonius ab, so findet man,

dass bei N die Ziffer IV steht, also $NP = \frac{4}{10}$ mn beträgt, daher $MN = 5,4$ mn, etc.

Wäre der Nonius 11 mn, und in 10 gleiche Theile getheilt, so würde das Ablesen der Unterabtheilungen nach derselben Richtung stattfinden, wie das am Massstab selbst.

Aus der Dicke der Theilstriche kann man noch kleinere Theile angeben, als jene, welche der Nonius angibt. — Gebrauch der Loupen. —

Solche Vorrichtungen werden bei Winkelmessungen und bei solchen Messungen angewendet, wo der Transversal — Massstab nicht benützt werden kann.

5.) Die Normalmassstäbe sind zweierlei Art und zwar entweder *étalons à bouts* oder *étalons à traits* [Standard].

Bei ersteren ist die Entfernung der End- und Stossflächen der genau gearbeiteten Metallplatte das eigentliche Mass, bei letzteren ist das Instrument etwas länger und das eigentliche Mass durch Striche begrenzt. — Das Normalmass kann nur dann als richtig angesehen, und zur Vervielfältigung angewendet werden, wenn es durch keinerlei Einflüsse geändert wurde, und die Temperatur jedesmal berücksichtigt wird. Denn ein solcher Massstab ist nur für die Temperatur richtig, bei welcher er gefertigt wurde, und die nach ihm gemessenen Längen etc. müssen daher auf jene Temperatur reducirt werden, wenn sie richtig sein sollen.

Anmerkung II. Zum Copiren von Zeichnungen und gleichzeitigem Verjüngen bedient man sich verschiedener Instrumente, die, soweit es hier gestattet ist, in Erwähnung kommen sollen.

Sehr einfach ist der sogenannte Reductions-zirkel. Es besteht dieser eigentlich aus zwei Zirkeln, von welchen die Schenkel des einen die Verlängerungen der Schenkel des anderen sind, und die Längen der Schenkel beider Zirkel in einem bestimmten Verhältnisse stehen. Sind z. B. die Schenkel des einen Zirkels 5mal grösser, als die des anderen, und man öffnet den einen so weit, dass er eine bestimmte Länge fasst, so wird der zweite Zirkel sich gleichzeitig öffnen und seine Oeffnung wird $\frac{1}{5}$ jener Länge enthalten.

Um verschiedene Reductionen mit einem einzigen Instrument dieser Art vornehmen zu können, sind die Schenkel linealförmig und eingetheilt, und die Enden derselben mit stählernen Spitzen versehen, um die Längen gehörig abnehmen und auftragen zu können.

Ein an beiden Linealen verschiebbares Gewinde kann an einem beliebigen Theilungspuncte beider Lineale durch eine Druckschraube befestiget werden, wodurch beide Lineale so abgetheilt werden, dass die Theile des einen in demselben Verhältnisse stehen, wie die Theile des anderen. —

Ein anderes Instrument dieser Art, durch welches man bestimmte Theile einer beliebigen Länge angeben kann, ist der Proportionalzirkel. Es besteht dieser aus zwei gut gearbeiteten gleich langen Linealen, welche um ein gemeinschaftliches Gewinde gedreht werden können. Auf jedem ist eine Gerade so gezeichnet, dass beide, gehörig verlängert, sich im Drehungspuncte beider Lineale schneiden würden. Diese beiden Linien sind in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile getheilt, zum Beispiel in 500 gleiche

500 gleiche Theile, und die Theilungspunkte sind übereinstimmend bezeichnet.

Soll man nun z. B. eine gegebene Gerade in 11 gleiche Theile theilen, so suche man auf dem Proportionalzirkel auf beiden Linealen zwei übereinstimmende Theilpunkte, welche mit Zahlen bezeichnet sind, in welchen 11 ohne Rest enthalten ist, z. B. 209. Oeffnet man nun den Proportionalzirkel so weit, dass man die in einen Handzirkel gebrachte Länge L zwischen die Theilpunkte 209 beider Schenkel eintragen kann, so werden zwei gleichnamig bezeichnete Theilpunkte beider Lineale gerade um $\frac{1}{11} L$ von einander abstehen. Es ist nämlich

$$L : \frac{1}{11} L = 209 : 19$$

daher wird der Abstand der Theilpunkte, welche mit 19 bezeichnet sind, $\frac{1}{11}$ der angegebenen Linie L sein.

Der Proportionalzirkel kann übrigens auch noch dazu dienen, um aus dem Halbmesser eines Kreises die zugehörigen Seiten einbeschriebener regelmässiger Vielecke sogleich abzunehmen; er kann ferner so eingerichtet sein, dass man die Quadrat- und Cubikwurzeln gegebener Zahlen abnehmen, und noch verschiedene andere Beziehungen von Längen und Zahlen aufsuchen kann, ohne zuerst die einschlägigen Constructionen und Rechnungen vorzunehmen. —

Endlich soll auch die einfachste Gestalt des Pantographen, nämlich der Storchschnabel in Erwähnung kommen.

Dieses Instrument ist aus vier Linealen [Fig. 179.] AG , AH , BE und BF zusammengesetzt, welche bei A , D , B und C durch Stifte verbunden sind, um welche sie sich drehen können. Hiebei ist ferner $BC =$

$AD = CG$; $BD = AC = DH$ und $AG = AH$. Wenn nun bei B ein Bleistift ist, bei H aber ein Griffel, mit welchem man auf den Linien einer Originalzeichnung nachzeichnet, so wird der bei B angebrachte Bleistift die Linien in derselben Ordnung so copiren, dass die hiedurch verzeichnete Figur der angegebenen ähnlich wird, denn es ist $\triangle AGH \sim \triangle GCB$ in allen Lagen, welche H und B annehmen, daher verhält sich jede von B gezeichnete Linie zu einer von H gezeichneten, wie $GC : GA$. Es kommt also nur darauf an, das Verhältniss von $GC : GA$, so einzurichten, dass die Seiten der copirten Figur zu denen der Originalfigur in einem bestimmten und verlangten Verhältnisse stehen, weshalb die Lineale eingetheilt und an beliebigen Stellen zusammengefügt werden können. —

§. 102.

Aufgabe. Die Peripherie p eines Kreises aus dessen Radius r oder Diameter d zu berechnen.

Auflösung. Man messe den Diameter d oder den Radius r und multiplicire den Diameter oder den doppelten Radius durch die Ludolphische Zahl π .

Beweis. Es ist für alle Kreise:

$$d : p = 1 : \pi \text{ [§. 95.]; folglich}$$

$$p = d\pi \text{ oder } 2r\pi.$$

Beispiel. Ist $d = 7'$, so ist $p = d\pi$

$$= 7. 3, 141..$$

$$\text{also } p = 21,987' = 2^\circ$$

$$1' 9'' 8''' 7'''' \text{ [§. 97.]}$$

Zusatz. Aus $p = d\pi$ ergibt sich, dass $d = \frac{p}{\pi}$

ist, d. h. man findet den Diameter eines Kreises, wenn man dessen Peripherie durch die Ludolphische Zahl dividirt.

Beispiele zur Uebung.

1.) Wie gross ist die Peripherie eines Kreises, dessen Radius $= 6' 7''$ ist?

2.) Die Peripherie eines Kreises ist $7^{\circ} 3' 8''$; wie gross ist dessen Radius und Durchmesser?

3.) Der grösste Umkreis der Erde ist 5400 Meilen, wie gross der Diameter?

§. 103

Erklärungen. a) Um Winkel zu messen bedarf man eines Winkels als Mass. Dieses Mass ist der rechte Winkel, denn alle rechten Winkel sind gleich [§. 9. Zus. V.]. Der neunzigste Theil eines rechten Winkels heisst ein Grad, der sechzigste Theil eines Grades eine Minute, und der sechzigste Theil einer Minute eine Secunde. Man nennt diese Eintheilung die Sexagesimaleintheilung.

Grade, Minuten und Secunden werden dadurch bezeichnet, dass man rechts über die Zahlen die Zeichen $^{\circ}$, $'$, $''$ setzt; so z. B. heisst $15^{\circ} 12' 36''$ — 15 Grade, 12 Minuten und 36 Secunden.

I. Zusatz. Ein gerader Winkel hat 180° , und die Summe aller Winkel rings um einen Punkt in einer Ebene beträgt 360° [§. 9. Zus. IV. und §. 10. Zus. II.]

II. Zusatz. Betrachtet man den Winkel als Centralwinkel eines Kreises, so ergibt sich, dass durch die Theilung des rechten Winkels auch der Quadrant in 90 gleiche Theile getheilt wird, welche man ebenfalls

Grade nennt. Dasselbe gilt von den Unterabtheilungen in Minuten, Secunden etc. Der Halbkreis hat demnach 180° und die ganze Peripherie 360° etc.

b.) Auch das Französische Winkelmaass weicht von unserer Eintheilung des Quadranten in 90° (Degrés) ab. In Frankreich hat man für Winkel und Umkreis auch die Centesimaltheilung d. i. man theilt einen Quadranten in 100 Grade (Grades), einen Grad in 100 Minuten und eine Minute in 100 Secunden. Die ganze Peripherie des Kreises beträgt also 400° .

c) Das Messen eines Winkels auf dem Papiere geschieht durch das Auflegen des Transporteurs [eines auf einen flachen Körper gezeichneten und in ganze und halbe Grade etc. getheilten Halbkreises] und durch das Abzählen der, durch die Schenkel des Winkels abgeschnittenen, Grade etc. Diese Winkelmessung ist nur eine beiläufige Schätzung des Winkels. Von der genauen Winkelmessung handelt die Trigonometrie.

Anmerkung. Alles, was hier von einem Winkel gesagt ist, gilt auch von jedem Bogen, der die beiden Schenkel des Winkels abschneidet, und mit einem beliebigen Halbmesser beschrieben wurde, denn es gehören zu gleichen Mittelpunktswinkeln in einerlei oder gleichen Kreisen auch gleiche Bögen. — Zweierlei Maas eines Winkels.

§. 104.

Aufgabe. Man soll die Französische oder Centesimaltheilung der Winkel auf unsere Sexagesimaltheilung reduciren.

Auflösung und Beweis. Es sind 100 Grades $= 90$ Degrés, also $1 \text{ Grade} = \frac{9}{10} \text{ Degré}$, d. h. wenn

man von der Zahl der Grades den zehnten Theil derselben subtrahirt, so erhält man die entsprechende Zahl der Degrés, d. i. ganze Grade mit einem Decimalbruche, der nun weiter in Minuten und Secunden, durch ein fortgesetztes Multipliciren mit 60, verwandelt wird. Z. B. man soll $101^{\circ} 66' 95''$ französisches Winkelmaß in unser Sexagesimalmaß nach Graden, Minuten etc. verwandeln.

Es ist $101^{\circ} 66' 95'' = 101,6695^{\circ}$, davon $\frac{1}{10}$ subtrahirt = 10,16695, gibt

$101^{\circ} 66' 95''$ Cent. Einth. = 91,52055 Grade, welche im Sexagesimalmaße $91^{\circ} 30' 9,18''$ betragen.

Zusatz. Bei der umgekehrten Reduction der Sexagesimal — auf die Centesimaleintheilung verwandle man die Minuten und Secunden der ersteren in einen Decimalbruch, und addire zu dem ganzen Ausdrucke sein Neuntel. Denn, da 1 Grade = $\frac{9}{10}$ Degré ist, so muss 1 Degré = $\frac{10}{9}$ Grades sein.

Z. B. nach der Sexages. Einth. ist:

$38^{\circ} 42' = 38,7^{\circ}$, dazu $\frac{38,7}{9} = 4,3$ addirt, gibt

$38^{\circ} 42'$ Sexag.-Einth. = 43° Centesim.-Einth.

§. 105.

Aufgabe. Aus dem Diameter d und der Anzahl der Grade n eines Bogens die Länge desselben a zu finden.

Auflösung.

Es ist $n^{\circ} : 360 = a : p$

$n^{\circ} : 360^{\circ} = a : d\pi$ (§. 102.);

folglich $a = d\pi \frac{n^{\circ}}{360^{\circ}} = 2r\pi \frac{n^{\circ}}{360^{\circ}}$

Beispiel. Für $d = 6'$ und $n = 50^\circ$ ist:

$$a = 6. 3, 141. \frac{50}{360} = 2, 617.. = 2' 6'' 2'''$$

beinahe.

Hält der Bogen n , Minuten und Secunden, oder Grade, Minuten und Secunden, so muss man sowohl den Zähler als den Nenner des Bruches $\frac{n^\circ}{360^\circ}$ auf die kleinste Benennung, Secunden, reduciren.

Zusatz. Aus $a = d\pi \frac{n^\circ}{360^\circ}$ ist $n^\circ = \frac{360^\circ a}{d\pi}$, woraus die Anzahl Grade, aus dem Diameter und aus der Länge des Bogens berechnet wird.

B. Berechnung der ebenen Figuren.

§. 106.

Erklärung. Das Mass einer Fläche ist ebenfalls eine Fläche. Das gewöhnlichste Mass zu geometrischen Messungen ist der Quadrat-Fuss, d. i. ein Quadrat, wovon die Seite einen Fuss misst. [§. 44. a und §. 78. Zus. III.]. Man theilt ihn

1) nach der Decimaleintheilung in 100 kleinere Quadrate, Quadratzoll, jeden Quadratzoll in 100 kleinere Quadrate, Quadratlinien, und jede Quadratlinie wieder in 100 Quadrate, Quadratscrupel. 100 Quadratfuss bilden eine Decimalquadrat-

ruthe. $400 \square^\circ = 40000 \square'$ geben ein Tagwerk.

2) nach der Duodecimaleintheilung in 144 Quadratzoll, jeden Quadratzoll in 144 Quadratlinien und jede Quadratlinie in 144 Quadratscrupel. 144 Quadratfuss geben eine Duodecimalquadratruthe.

Man bezeichnet 6 Quadratruthen, 7 Quadratfuss, 18 Quadratzoll etc. durch $6^{\square^{\circ}}$ $7^{\square'}$ $18^{\square''}$.

Folgende Tabelle gewährt eine allgemeine Uebersicht über die

Eintheilung des Flächenmasses.

a. Decimalmass.

$\square$ Fuss.	$\square$ Zoll.	$\square$ Linien.	$\square$ Scrupel.
1.	100.	10000.	1000000.
	1.	100.	10000.
			100.

b. Duodecimalmass.

$\square$ Fuss.	$\square$ Zoll.	$\square$ Linien.	$\square$ Scrupel.
1.	144.	20736.	2985984.
	1.	144.	20736.
		1.	144.

Eine Figur berechnen heisst angeben, wieviel Quadratruthen, Quadratfuss, Quadratzoll etc. in ihr enthalten sind.

Das französische Flächenmass ist das Quadrat des Decameters [§. 99. b], Are genannt, [948,66 Pariser-Quadratfuss]. Ein Are enthält 10 Déciare oder 100 Centiare,

so, dass ein Centiare ein Quadratmetre ist. 100 Are geben ein Hectare und 100 Hectare ein Myriare.

Anmerkung. Ist eine Figur nach einem verjüngten Massstabe dargestellt worden, so stehen die Seiten derselben mit den gleichliegenden der verjüngten Figur in gleichem Verhältnisse [§. 93.], und zwar in dem Verhältnisse, welches durch den Massstab ausgedrückt ist.

Wenn ferner $\frac{1}{m}$ die Verjüngung, ferner der Flächeninhalt der Figur $= A$, und jener der verjüngten $= a$ ist, so hat man

$$A : a = m^2 : 1 \text{ [§. 97.]}$$

$$\text{daher } \frac{1}{m} = \sqrt{\frac{a}{A}}$$

woraus ebenfalls die Verjüngung gefunden werden kann.

Diese Verjüngung lässt sich auch durch Construction darstellen. Wenn nämlich [Fig. 180.] ab die Seite einer Figur a ist, und man trägt auf eine Linie ax die Seite ab auf, errichtet auf diese in a die Senkrechte ay , trägt auf letztere

$al = ab$, $all = bl$, $alll = bll$, so wird, wenn z. B. $alll$ die Seite der gleichnamigen Figur A ist

$$A : a = 3 (ab)^2 : 1 (ab)^2 = 3 : 1 \text{ sein}$$

$$\text{also } A = 3 a \text{ etc.}$$

Man hat hiedurch einen Flächen- oder quadratischen Massstab construiert. —

§. 107.

Aufgaben. 1.) Was geben $5^{\square^{\circ}} 2^{\square'}$ $45^{\square''}$ Decimalmass im Duodecimalmasse?

Auflösung. $5^{\square^{\circ}} 2^{\square'} 45^{\square''} = 50245^{\square''}$ Decimalmass.

$50245^{\square''} : x^{\square''dd} = 100 : 144$, woraus
 $x = 72352,8^{\square''} = 3^{\square^{\circ}} 70^{\square'} 64^{\square''} 115^{\square'''} 28,8^{\square''''}$ Doudecimalemass.

2.) Was geben $2^{\square''} 5^{\square'''}$ Duodecimalmass im Decimalmasse ausgedrückt?

Auflösung. Es ist $2^{\square''} 5^{\square'''} = 41477^{\square''''}$ Duodecimalmass.

$41477^{\square''''dd} : x^{\square''''d} = 2985984 : 1000000$, woraus
 $x = 13890,56^{\square''''} = 1^{\square''} 38^{\square'''} 90,6^{\square''''}$ Decimalmass.

Zur Uebung.

- 1.) Was geben $9^{\square^{\circ}}$ Duod. M. im Dec. M.?
- 2.) Was geben $25^{\square^{\circ}}$ Dec. M. im Duod. M.?
- 3.) Was geben $4^{\square^{\circ}} 7^{\square'}$ Dec. M. im Duod. M.?
- 4.) Was geben $1^{\square^{\circ}} 36^{\square'} 95^{\square''}$ Duod. M. im Dec. Masse?

§. 108.

Aufgabe. [Fig. 104.] Ein Parallelogramm $AD = P$ zu berechnen.

Auflösung und Beweis. Man messe dessen Grundlinie $CD = B$ und Höhe $AE = H$ durch einerlei Mass, z. B. Fuss etc., und vergleiche das Parallelogramm

mit dem Quadratfuss ad , worin $ac = cd = 1$ ist; nämlich:

$$ad : P = ac \cdot cd : AE \cdot CD \text{ [§. 78. Zus.]} \\ = 1 : H \cdot B$$

d. i. der Quadratfuss, ad , ist im Parallelogramm P so oft enthalten, als 1 in dem Producte $H B$. Man findet also die Zahl der $\square'$ etc., welche das Parallelogramm enthält, durch das Product aus der Grundlinie und Höhe.

Bei Berechnung des Rechteckes multiplicirt man zwei anstossende Seiten.

II. Zusatz. Man berechnet ein Dreieck, wenn man dessen Grundlinie und Höhe multiplicirt, und das Product durch zwei dividirt. [§. 45. Zus. III.]

III. Zusatz. Bedeutet a die Grundlinie und b die Höhe eines Rechteckes, so ist dessen Inhalt $= a \cdot b$. Das Product zweier Linien kann man daher immer als ein Rechteck betrachten, dessen Grundlinie der eine Factor und dessen Höhe der andere Factor jenes Productes ist. — Da ferner der Inhalt eines Dreieckes dem halben Producte aus Grundlinie und Höhe gleich ist, so kann ein Product ab zweier Linien auch ein Dreieck bedeuten, dessen Grundlinie dem zweifachen ersten, und dessen Höhe dem zweiten Factor des Productes [oder umgekehrt] gleich ist.

Beispiele.

1.) In Fig. 104 sei $CD = 8' 7''$, $AE = 6' 8'' 3'''$; wie viel beträgt der Inhalt des Parallelogramms?

Auflösung. Es ist $P = B \cdot H = 8,7 \times 68,3'$
 $= 8,7 \times 6,83$
 $= 59,421 \square' =$
 $= 59 \square \quad 42 \square'' \quad 10 \square'''.$

2.) In einem Rechtecke misst eine Seite $39^\circ 3' 6''$, die daranstossende $54^\circ 7' 8''$; wie gross ist sein Inhalt M.?

Auflösung. $M = B \cdot H = 39,36^\circ \times 54,78^\circ$
 $= 39,36 \cdot 54,78$
 $= 2156,1408 \square^\circ = 2156 \square^\circ \quad 14 \square'$
 $\quad 8 \square''$ [I. Zus.]

3.) In einem Dreiecke misst die Grundlinie $8' 6''$ die Höhe $5' 3'''$; was ist der Inhalt?

Auflösung. $M = \frac{1}{2} B \cdot H$ [II. Zus.] $= \frac{1}{2} \cdot 8,6$
 $\times 5,03' = \frac{1}{2} \cdot 8,6 \times 5,03$
 $= 21,629 \square' = 21 \square' \quad 62 \square'' \quad 90 \square'''$

4.) In einem Dreiecke misst die Grundlinie $12'$ die Höhe $3' 4'''$; wie gross ist seine Fläche?

Auflösung.
 $M = \frac{1}{2} \cdot 12 \times 3,004 = 18,024 \square' = 18 \square' \quad 2 \square''$
 $\quad 40 \square'''.$

Zur Uebung.

1.) Welchen Flächeninhalt hat ein Quadrat, dessen Seite $3^\circ 7''$ misst?

2.) Welchen Inhalt hat ein Parallelogramm, dessen Grundlinie $3^\circ 6''$ und dessen Höhe $9' 3''$ lang ist?

3.) Wie gross ist das Rechteck, dessen Länge $9^\circ 8''$ und dessen Breite $8' 9''$ ist?

4.) Wie gross ist ein Dreieck, dessen Grundlinie $9^{\circ} 6' 3''$ und dessen Höhe $1^{\circ} 9''$ beträgt?

5.) In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die eine Kathete $9' 8''$, die andere $1^{\circ} 1'$; wie gross ist sein Inhalt?

6.) Wie gross ist die Höhe eines Parallelogramms, dessen Inhalt $36^{\square^{\circ}} 7^{\square'}$ und dessen Grundlinie $8^{\circ} 9'$ ist?

7.) Die Fläche eines Quadrats hält $1824^{\square^{\circ}} 62^{\square'}$; wie gross ist eine Seite?

8.) Wie gross ist die Grundlinie eines $80^{\square'}$ grossen Dreieckes, wenn die Höhe $7' 3''$ beträgt?

§. 109.

Aufgabe. [Fig. 50.] Ein Trapez zu berechnen.

Auflösung. Man messe die beiden Parallelen AB und CD, sowie ihren Abstand AE, durch einerlei Mass, und nehme das halbe Product aus der Summe der Parallelen in die Höhe, oder man messe den Abstand AE, und sodann die Verbindungslinie der Mittelpunkte der nicht parallelen Seiten, und multiplicire diese beiden Grössen mit einander, so wird das erhaltene Product auch dem Inhalte des Trapezes gleich sein.

Beweis. Man ziehe AD, so ist:

$$\begin{aligned}\text{Trap.} &= \triangle ACD + \triangle ABD \\ &= \frac{1}{2} CD \cdot AE + \frac{1}{2} AB \cdot AE\end{aligned}$$

$$\text{also Trap.} = \frac{1}{2} AE (CD + AB) = AE \times FG \text{ [§. 81.]}$$

Beispiel. Gesetzt $AE = 6' 3''$, $AB = 12' 7''$, $CD = 18'$. Wie gross ist der Inhalt?

Zusatz I. Jede geradlinige Figur wird berechnet, indem man sie durch Diagonalen, die sich nicht schneiden, in Dreiecke theilt, diese einzeln berechnet [§. 108. Zus. II.], und ihre Werthe summirt.

Zusatz II. Jedes Trapez ist einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie die Halbirungslinie der nicht parallelen Seiten des Trapezes, und dessen Höhe der Abstand der parallelen Seiten ist.

§. 110.

Aufgabe. Den Flächeninhalt eines regulären n Eckes aus einer Seite a , und dem Radius des, darum beschriebenen Kreises r zu finden.

Auflösung und Beweis. [Fig. 80.]

$BG = r$, $BC = a$, $BL = \frac{1}{2} a$. Es ist

$\text{Pol.} = n \cdot \triangle BGC$ [§. 70. Zus. I.]

$= n \cdot \frac{1}{2} a \cdot GL$ [§. 108. Zus. II.]

$= \frac{1}{2} a \cdot n \sqrt{BG^2 - BL^2}$ [§. 88. Zus. III.]

$= \frac{1}{2} a n \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2}$

$= \frac{1}{4} a n \sqrt{4 r^2 - a^2}$

$= \frac{1}{4} a n \sqrt{[2 r + a] [2 r - a]}.$

I. Zusatz. Ist das reguläre Polygon ein Sechseck, oder $n = 6$ und $a = r$ [§. 72.], so ist:

$\text{Pol.} = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}.$

Beispiel. Die Seite eines regulären Sechseckes ist $3' 7''$, wie gross der Inhalt?

II. Zusatz. Aus obiger Formel,

$P = \frac{1}{4} a n \sqrt{4 r^2 - a^2}$, ist:

$$1) \ r = \frac{\sqrt{[16 P^2 + a^4 n^2]}}{2 a n}$$

$$2) a = \sqrt{2 \left[r^2 \pm \frac{1}{n} \sqrt{[r^2 n + 2P][r^2 n - 2P]} \right]}$$

$$3) n = \frac{4P}{a \sqrt{[4r^2 - a^2]}} = \frac{4P \sqrt{[4r^2 - a^2]}}{a [4r^2 - a^2]}$$

oder

$$n = \frac{4P \sqrt{[2r + a][2r - a]}}{a [2r + a][2r - a]}$$

§. 111.

Aufgabe. Eine Kreisfläche zu berechnen.

Auflösung und Beweis. Setzt man die Kreisfläche K und den Radius r , so ist:

$$K = \frac{1}{2} p \cdot r = \frac{1}{2} 2r\pi \cdot r = r^2 \pi \quad [\text{§. 73. Zus. II.} \\ \text{§. 108. II. Zus.} \\ \text{und §. 102.}]$$

oder

$$K = \frac{1}{4} d^2 \pi, \text{ da } r^2 = \frac{1}{4} d^2 \text{ ist.}$$

Beispiel. Wie gross ist der Kreis, dessen Radius 8' 7" gross ist?

I. Zusatz. Aus $K = r^2 \pi = \frac{1}{4} d^2 \pi$ ist:

$$r = \sqrt{\frac{K}{\pi}} \text{ und } d = 2 \sqrt{\frac{K}{\pi}}.$$

II. Zusatz. [Fig. 105.] Es ist der Kreisausschnitt oder

$$\text{Sect. } ABC = r^2 \pi \frac{n^0}{360^0}; \text{ denn}$$

$$\text{Sect. } ABC = \frac{1}{2} AB \cdot \text{Bog. } BC. \quad [\text{§. 73. Zus. III.}] \\ = \frac{1}{2} r \cdot 2r\pi \frac{n^0}{360^0} \quad [\text{§. 105.}]$$

oder

$$\text{Sect. } ABC = r^2 \pi \frac{n^0}{360^0}.$$

III. Zusatz. Aus $S = r^2 \pi \frac{n^0}{3600}$ ist

$$n^0 = \frac{360}{r^2 \pi} S \text{ und } r = \sqrt{\left[\frac{360}{n \pi} S \right]}.$$

IV. Zusatz. Segment BDC = Sect. — $\triangle ABC$ [§. 15. b.].

V. Zusatz. Der zwischen zwei concentrischen Kreisen liegende Ring [Fig. 18.], wenn R und r die Radien sind, ist

$$= R^2 \pi - r^2 \pi = \pi [R^2 - r^2]$$

oder

$$\text{Ringfläche} = \pi [R + r] [R - r].$$

Beispiele.

1) Der Winkel des Kreisausschnittes ist $36^0 12'$, der Radius $3'$; wie gross ist die Fläche des Sectors?

2) Wie gross ist der Winkel des Ausschnittes, dessen Inhalt $1^0 24' 62'' 66'''$ ist, wenn der Radius $6' 3''$ misst?

3) Wie gross ist der Radius des Kreises, worin für einen Winkel von $43^0 4'$ der Sector $6' 16'' 13''' 72''''$ hält?

4) Wie gross ist das Segment, das durch die Seite eines regulären Sechseckes $= 4'$ im Kreise abgeschnitten wird? [§. 72.]

5) Wieviel beträgt die Fläche des Ringes, welchen zwei concentrische Kreise bilden, deren Radien $8'$ und $4' 3''$ sind?

§. 112.

Aufgabe. [Fig. 106.] Ein Rechteck AB zu quadriren, d. h. in ein, ihm gleiches, Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Man verlängere AC so, dass $CD = BC$ wird, beschreibe über AD einen Halbkreis und verlängere BC bis an die Peripherie, dann ist EC die Seite des verlangten Quadrates.

Beweis. Thes. $EC^2 = AC \cdot BC$

Dat. Es ist $AC : EC : CD$ [§. 88. Zus. II.].

Mithin $EC^2 = AC \cdot CD = AC \cdot BC$, weil $CD = BC$ ist.

I. Zusatz. Jede geradlinige Figur lässt sich quadriren; denn man kann sie, nach §. 52. II. Zus., in ein Dreieck, und dieses, nach §. 52. I. Zus., in ein Rechteck verwandeln, welches letztere nach obiger Aufgabe quadriert werden kann.

II. Zusatz. Der Kreis lässt sich nicht quadriren; denn, da man die Peripherie aus dem Diameter nur durch Annäherung findet, so lässt sich auch kein, dem Kreise nach aller mathematischen Schärfe gleiches, Dreieck, mithin auch kein solches Quadrat construiren.

§. 113.

Aufgabe. [Fig. 107.] Ein Parallelogramm nach einem bestimmten Verhältnisse zu theilen.

Auflösung und Beweis. Man theile eine Seite z. B. CD nach dem gegebenen Verhältnisse z. B. wie $1 : 2 : 3$ [§. 82. 1.], so, dass

$Cm : mn : nD = 1 : 2 : 3$ ist.

Durch die Theilungspunkte m und n ziehe man zur anliegenden Seite AC die Parallelen km und ln , so ist:

$$Am : kn : lD = Cm : mn : nD \text{ [§. 76. Zus.]}$$

oder

$$Am : kn : lD = 1 : 2 : 3.$$

Zusatz. Ist die zu theilende Figur ein Dreieck, so theile man eine Seite nach dem gegebenen Verhältnisse, und ziehe von den Theilungspunkten nach der gegenüberstehenden Spitze des Dreieckes gerade Linien [§. 76.]

§. 114.

Aufgabe. [Fig. 108.] Jede geradlinige Figur in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung und Beweis. Man berechne die ganze Figur [§. 109. Zus.], dividire den Inhalt durch die gegebene Anzahl der Theile, so erhält man die Grösse eines Theiles. Er sei N .

Nun suche man den Flächeninhalt des äussersten Dreieckes DEC , dann ist entweder

$$1) \triangle DEC = N, \text{ oder}$$

$$2) \triangle DEC < N, \text{ oder}$$

$$3) \triangle DEC > N.$$

Bei No. 1. ist das Dreieck DEC ein verlangter Theil der Figur.

Bei No. 2. subtrahire man den Inhalt des Dreieckes von N , nehme diesen Unterschied für den Inhalt eines Dreieckes, dessen Grundlinie EC ist, und suche die entsprechende Höhe [§. 108. Zus. II.]. Auf EC errichte man eine Senkrechte aE , gleich der gefundenen Höhe. Durch a ziehe man $ac \parallel EC$ und die Li-

nien aC und cC . Es ist dann $\triangle aEC = \triangle EcC$ [§. 49. Zus. II.] und dem obigen Unterschiede gleich, mithin auch

$$\triangle DEC + \triangle EcC = M.$$

Bei Nro. 3. subtrahire man M von $\triangle DEC$ und bestimme, wie bei Nro. 2. die Dreiecke, nämlich $\triangle bEC = \triangle dEC$, dem gefundenen Unterschiede gleich; dann ist $\triangle DEC - \triangle dEC = \triangle DdC = M$.

Auf eine ähnliche Art lassen sich die übrigen Theile finden.

Zusatz. Sollen die Theile der Figur in einem gegebenen Verhältnisse stehen, so berechne man aus dem ganzen Inhalte die treffenden Theile und construire sie so, wie in obiger Aufgabe gezeigt wurde.

§. 115.

Aufgabe. Von einem gegebenen Punkte auf einer Seite eines Dreieckes das letztere in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung. [Fig. 181.] Das $\triangle ABC$ soll z. B. von M aus in 6 gleiche Theile zerlegt werden. Man theile die Seite AB , auf welcher sich der angegebene Punkt M befindet in 6 gleiche Theile, trage einen solchen Theil von B aus, und einen zweiten von A aus auf AB , so dass also $BD = AE = \frac{1}{6} AB$ wird.

Man ziehe nun von M aus nach dem gegenüberstehenden Scheitel C eine Gerade, und ziehe mit dieser durch D und E die Parallelen DF und EL , so werden letztere die Seiten BC und AC beziehungsweise in F und L schneiden.

Trägt man nun BF auf BC , und AL auf AC , so oft es angeht, macht also $GH = FG = BF$, ferner

$KL = AL$, und verbindet die Theilungspuncte, F, G, H, K und L mit M durch gerade Linien, so werden diese das Dreieck ABC in 6 gleiche Theile theilen.

Beweis. Thes. $\triangle AML = \triangle MLK = \triangle KMH = \triangle HMG = \triangle GMF = \triangle BMF = \frac{1}{6} \triangle ACB$

Dat. $AE = BD = \frac{1}{6} AB$; $EL \parallel DF \parallel MC$,
 $CK = KL$; dann $HG = GF = BF$.

Zieht man die Hüllslinien CD und CE, so wird
 $\triangle CBD = \triangle CAE = \frac{1}{6} \triangle ABC$ [§. 50. 2.]

Nun ist aber $\triangle MDF = \triangle CDF$ [§. 49. II. Zus.]

also $\triangle MDF + \triangle BDF = \triangle CDF + \triangle BDF$,
 oder

$\triangle MBF = \triangle CDB = \frac{1}{6} \triangle ABC$,
 daher auch $\triangle MBF = \triangle MFG = \triangle MGH =$
 $= \frac{1}{6} \triangle ABC$

Ferner $\triangle CEL + \triangle AEL = \triangle MEL + \triangle AEL$
 [§. 49. II. Zus.]

also auch $\triangle MAL = \triangle MLK = \triangle CAE = \frac{1}{6} \triangle ABC$

Mithin $\triangle AML = \triangle MLK = \triangle KMH = \triangle HMG = \triangle GMF = \triangle BMF = \frac{1}{6} \triangle ABC$.

§. 116.

Aufgabe. Ein Dreieck ABC nach einem gegebenen Verhältnisse so zu theilen, dass die Theilungslinien durch den auf einer Seite AC gegebenen Punct M gehen.

Auflösung. [Fig. 182.] Man theile die Seite AC, auf welcher der gegebene Punct sich befindet, nach dem angegebenen Verhältnisse $m : n : p : q$ [§. 82.], etwa in D, E und F. Hierauf ziehe man vom Puncte M nach dem gegenüberstehenden Scheitel B eine Ge-

rade BM, mit dieser die Parallelen DK, EH und FG, und verbinde die einzelnen Durchschnittspunkte dieser Parallelen und der Seiten des Dreieckes mit dem Punkte M, so erhält man die Figuren AKM, MKH, HMBG und MGC, welche sich eben so verhalten, wie die angegebenen Zahlen.

Beweis. Thes. $\triangle AKM : \triangle KHM : \text{Viereck HBG M} : \triangle MGC = AD : DE : EF : FC$

Daten. $AD : DE : EF : FC = m : n : p : q$; ferner

$DK \parallel EH \parallel FG \parallel BM$.

Zieht man BD, BE und BF, so hat man

$$\triangle ABD = \triangle MAK$$

$$\triangle BEM + \triangle BMF = \triangle BHM + \triangle BMG \\ = \text{Viereck MHBG} [\S. 49. \text{ II. Zus.}],$$

also auch $\triangle BDE = \triangle KHM$

Nun ist aber

$$\triangle ABD : \triangle BDE : \triangle BEF : \triangle BFC = AD : DE : EF : FC [\S. 76.],$$

daher auch

$$\triangle AKM : \triangle MKH : \text{Viereck MHBG} : \triangle MGC \\ = AD : DE : EF : FC = m : n : p : q.$$

§. 117.

Aufgabe. Aus einem innerhalb eines Dreieckes gegebenen Punkte ein Dreieck in gleiche, z. B. in fünf gleiche Theile zu zerlegen.

Auflösung. [Fig. 183.] Soll $\triangle ABC$ von M aus in fünf gleiche Theile getheilt werden, so nehme man auf einer beliebigen Seite, z. B. auf BC, $CK = BL = \frac{1}{5} BC$ und ziehe $Ka \parallel AC$ und $Lb \parallel AB$. Nachdem man ferner MC und MB gezogen hat, lege man $aD \parallel MC$ und $bE \parallel MB$, trage sodann AD so oft auf

AC, und AE so oft auf AB, als diess angeht, und ziehe vom Punkte M aus nach den erhaltenen Theilpuncten die Geraden, so ist hiedurch das Dreieck gehörig getheilt.

Da AD nur einmal auf AC und AE hier nur einmal auf AB getragen werden kann, so nehme man $DG = AD$ und $EH = AE$, ziehe sodann MG und MH, so schneiden diese Linien die Seite BC in P und N so, dass wenn MP und MN gezogen werden, die Figuren ADM, CDMP, MPN, NMBE und AME unter sich gleich sind.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}\triangle MAD &= \triangle ACa [= \triangle CDa + \triangle ADa] = \triangle ACK \\ &= \frac{1}{5} \triangle ABC \text{ [§. 49. Zus. II. und §. 76.]}\end{aligned}$$

Eben so wird auch bewiesen, dass

$$\begin{aligned}\triangle AME &= \triangle MPN = \text{Viereck CDMK} = \text{Viereck MEBN} \\ &= \frac{1}{5} \triangle ABC \text{ ist.}\end{aligned}$$

§. 118.

Aufgabe. Von einem Punkte M aus innerhalb eines Dreieckes ABC das letztere nach einem bestimmten Verhältnisse $m : n : p : q$ zu theilen.

Auflösung. [Fig. 184.] Man theile eine der Seiten z. B. AC nach dem gegebenen Verhältnisse [§. 82.], so dass

$$AE : EF : FG : GC = m : n : p : q,$$

ziehe sodann die Gerade BM und verlängere sie bis D, lege $FK \parallel EH \parallel AB$ und $GI \parallel BC$. Hierauf ziehe man $HL \parallel KO \parallel MA$ und $IN \parallel MC$, und verbinde die erhaltenen Theilpuncte L, O und N mit M, so muss

$$\triangle BLM : \text{Viereck MLAO} : \text{Viereck MOCN} : \triangle MBN \\ = m : n : p : q.$$

Der Beweis wird, indem man die Proportion
 $\triangle ABE : \triangle EBF : \triangle BFG : \triangle BGC = m : n : p : q$
 benützt, wie oben geführt.

§. 119.

Aufgabe. Ein Dreieck ABC in eine beliebige Anzahl, z. B. in fünf gleiche Theile zu theilen, so dass die Theilungslinien einer Seite, z. B. BC parallel laufen.

Auflösung. [Fig. 185.] Man theile eine der beiden anderen Seiten, z. B. AB in 5 gleiche Theile, [nämlich in so viele, als das Dreieck selbst getheilt werden soll], und es sei

$$Aa = ab = bc = cd = dB = \frac{1}{5} AB,$$

und beschreibe über diese Seite AB einen Halbkreis. Nun fälle man aa' , bb' , cc' und dd' senkrecht auf AB , und ziehe die Geraden Aa' , Ab' , Ac' , und Ad' . Trägt man nun diese Linien der Ordnung nach von A nach e , von A nach f , von A nach g und von A nach h , und zieht $eM \parallel fN \parallel gL \parallel hK \parallel BC$, so muss

$$\triangle AME = MNfe = LNfg = LghK = KhBC = \frac{1}{5} \triangle ABC$$

sein.

Beweis. Es ist $Ae^2 = A^1a^2 = AB \cdot Aa$ [§. 88. Zus. I].

$$\text{Ferner } \triangle AMe : \triangle ABC = Ae^2 : AB^2 \text{ [§. 96.]}$$

$$\text{oder } \triangle AMe : \triangle ABC = AB \cdot Aa : AB^2 = Aa : AB$$

$$\text{also } \triangle AMe : \triangle ABC = 1 : 5.$$

Auf dieselbe Weise zeigt man auch, dass
 $\triangle ANf = \frac{2}{5} \triangle ABC$, also Viereck $MNfc = \frac{1}{5} \triangle ABC$,
 etc. etc. ist.

§. 120.

Aufgabe. Ein Dreieck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile so zu theilen, dass die Theilungslinien einer Linie von bestimmter Lage parallel laufen.

Auflösung. [Fig. 186.] Ist $\triangle ABC$ z. B. in fünf gleiche Theile zu theilen, so dass die Theilungslinien mit L parallel laufen, so mache man

$BE = EF = FG = GH = HA = \frac{1}{5} AB$,
 ziehe $CD \parallel L$, beschreibe über BD und AD Halbkreise und fälle auf AB die Senkrechten Ee , Ff , Gg und Hh . Macht man nun

$BK = Be$, $BM = Bf$, $BQ = Bg$, ferner

$AS = Ah$, und zieht $KN \parallel MP$ etc. $\parallel CD$, so ist hiedurch das $\triangle ABC$ in fünf gleiche Theile getheilt.

Der Beweis wird wie oben geführt.

§. 121.

Aufgabe. Ein Trapez $ABCD$ in drei gleiche Theile so zu theilen, dass die Theilungslinien mit AB und CD parallel laufen.

Auflösung. [Fig. 187.]. Man beschreibe über AB einen Halbkreis $Aa'b'B$, ziehe $DD' \parallel BC$, mache $Be' = BD'$, und ziehe $e'E$ senkrecht auf AB . Ferner mache man nun $Aa = ab = bE = \frac{1}{3} AE$ und ziehe aa' und bb' , senkrecht auf AB . Macht man nun $Bd = Ba'$ und $Bc = Bb'$, zieht $dF \parallel cK \parallel BC$, und

legt $FG \parallel KH \parallel AB$, so ist die verlangte Theilung vollzogen.

Verlängert man BC und AD bis N , so ist leicht zu beweisen, dass

$$ABGF = FKHG = KHCD = \frac{1}{3} ABCD \text{ ist.}$$

Aufgaben aus der ebenen Geometrie

Aufgaben aus der ebenen Geometrie.

§. 122.

Wenn die Namen der Addition, Subtraction, Multiplication, Division etc. so allgemeine Operationen bezeichnen, wie sie in der Buchstabenrechnung genommen werden; so sind sie nicht bloss arithmetische, sondern auch geometrische Operationen. In den algebraischen Ausdrücken kommen einstimmige und entgegengesetzte (positive und negative) Grössen vor. Diese einstimmigen, entgegengesetzten, positiven und negativen Grössen, sind nicht Grössen an sich, sondern in Beziehung aufeinander betrachtet. Diese Betrachtung findet auch bei Linien mit diesen Eigenschaftswörtern statt. Die Bestimmung des Einstimmigen und Entgegengesetzten bei Linien hängt von der einstimmigen oder entgegengesetzten Lage derselben ab; aber es ist willkürlich, welche Lage man positiv oder negativ nennen will; nur ergibt sich aus der Festsetzung der positiven Lage die negative, und aus der Festsetzung der negativen Lage die positive. Heisst die

Senkrechte von einem Punkte oberhalb einer geraden Linie auf diese positiv, so heisst die Senkrechte von einem Punkte unterhalb dieser Linie auf diese negativ; und umgekehrt, heissen die letzteren Senkrechten positiv, so sind die ersteren negativ. Eben so, ist die Richtung einer geraden Linie von der Rechten gegen die Linke positiv, so heisst jene von der Linken gegen die Rechte in derselben Linie negativ; oder auch umgekehrt, heisst man erstere negativ, so ist letztere positiv.

Es ist an sich klar, dass Einstimmiges sich vermehrt, vergrössert, Entgegengesetztes aber sich entweder ganz oder nur zum Theile tilget (Fig. 109.). Die Erzeugung der geraden Linie AC durch die Bewegung eines Punktes in der Richtung von A nach C, und die Erzeugung von BC, als die Bewegung eines Punktes in derselben Richtung, sind einstimmig. Beide zusammen geben AB. Die Erzeugung der geraden Linie AB, durch die Bewegung eines Punktes in der Richtung von A nach B, und die Erzeugung von BC, als die Bewegung eines Punktes in der Richtung von B gegen A, sind entgegengesetzt. Beide zusammen geben AC, wo also ein Theil des erzeugten AB durch die Erzeugung von BC aufgehoben wird.

Sollen die Buchstaben a , b , etc. gerade Linien bedeuten, so sind auch $a + b$, $a - b$, $\frac{ab}{c}$ etc. gerade Linien. Es bedeutet $\frac{ab}{c}$, die vierte geometrische Proportionallinie x , von den drei Linien c , a und b ; denn, wenn $c : a = b : x$ ist, so muss $x = \frac{ab}{c}$ sein. Eben-

so bedeutet ab nichts anderes, als die vierte geometrische Proportionallinie y , zwischen einer angenommenen Masseinheit 1 und a und b , denn es ist $1 : a = b : y$. etc.

Wenn man den bekannten Zeichen der algebraischen Operationen einen so allgemeinen Sinn beilegt, so gibt diess der Methode, Aufgaben durch Gleichungen aufzulösen, ebenfalls eine grosse Allgemeinheit, so, dass sie sich nicht auf arithmetische, sondern auch auf geometrische Aufgaben anwenden lässt. Nach Auflösung einer Gleichung, worin die Buchstaben Linien bedeuten, zeigt der letzte Ausdruck, worin die unbekannte Grösse von den bekannten abgesondert ist, durch welche geometrische Operationen, und in welcher Ordnung die gesuchte Linie aus den gegebenen und bekannten Linien gefunden werden könne. Hätte man die Gleichung

$$x = \frac{mn}{a} + d;$$

so drückt sie aus, dass die Linie x gefunden werde, wenn man zu a , m und n die vierte geometrische Proportionallinie sucht, und dazu die Linie d addirt. Man kann demnach die Auflösung geometrischer Aufgaben eben so, wie die Auflösung arithmetischer Aufgaben durch Gleichungen finden. Die Lösungsmethode ist ganz dieselbe; nur muss man die Fundamentalgleichung einer geometrischen Aufgabe aus geometrischen Gründen herleiten, und desswegen muss derjenige, welcher diese Methode bei geometrischen Aufgaben in Anwendung bringen will, wenigstens mit den ersten Gründen der Geometrie bekannt sein.

Das Hauptgesetz bei der Bildung der Fundamen-

talgleichung ist: Man nehme an, die gesuchte Grösse sei bereits gefunden, und drücke sie durch ein allgemeines Zeichen z. B. x etc. aus. Hierauf verbinde man sie, den Bedingungen der Aufgabe gemäss, mit den gegebenen Grössen, und entwickle nach den bekannten Reductions-Gesetzen der Gleichungen den Werth der unbekannten Grösse.

Bei geometrischen Aufgaben schliesst man durch die genaue Anschauung der Eigenschaften einer gegebenen Figur auf den Zusammenhang des Gegebenen mit dem Gesuchten; auch wird das Construiren passender Hilfslinien das Auffinden der Beziehungen oder des Zusammenhanges der unbekannten Grössen bedeutend erleichtern, ja oft sogar nur das einzige Mittel für die Lösung der Aufgabe sein. Die algebraische Bezeichnung und Operation dient dazu, die nöthigen Schlüsse abzukürzen, und nach der Auflösung der Gleichung lässt sich das gefundene Resultat aus der algebraischen Zeichensprache in die geometrische Sprache wieder übersetzen.

Ehe wir zur analytischen Auflösung der verschiedenen geometrischen Probleme übergehen, wollen wir das Vorzüglichste anführen über die

Construktion von Grössen, welche durch algebraische Ausdrücke gegeben sind.

§. 123.

Aufgabe. Man soll $a + b$ geometrisch construiren, wenn a und b gerade Linien bedeuten.

Auflösung. (Fig. 110.) Man ziehe eine gerade Linie MN, und trage darauf $MQ = a$ und an Q in derselben Richtung $QP = b$ auf; so ist $MP = a + b$.

I. Zusatz. Ist von den beiden Linien a und b eine z. B. negativ, oder $a - b$ zu construiren, so mache man $AB = a$, und nehme in der entgegengesetzten Richtung, von B gegen A, $BC = b$ weg; dann ist $AC = a - b$.

II. Zusatz. Ist $a - c$ zu construiren, die Linie c aber grösser als a , so ziehe man eine gerade Linie $DE = a$, und nehme nach der entgegengesetzten Richtung, von E nach D, $EF = c$ weg; dann ist $DF = a - c$.

III. Zusatz. Für die Construction des Ausdruckes $a - b - c$ mache man $AB = a$, von B gegen A hin trage man $BC = b$, und in derselben Richtung an C die Linie $CG = c$ auf; dann ist $AG = a - b - c$.

§. 124.

Aufgabe. Man soll die Ausdrücke $4a$, $\frac{2}{3}a$, $1\frac{3}{4}a$ construiren, wenn a eine gerade Linie ausdrückt.

Auflösung. 1) Um den Ausdruck $4a$ zu construiren, trage man die gerade Linie a vier Mal nach einer Richtung so auf, dass der Endpunct jedes vorhergehenden Theiles der Anfangspunct des folgenden ist.

2) Bei der Construction des Ausdruckes $\frac{2}{3}a$ theile man die gerade Linie a zuerst, nach §. 82. Zus., in

drei gleiche Theile, und trage davon einen Theil zwei Mal nach der positiven Richtung auf.

3) Um $1\frac{3}{4}a$ zu construiren, setze man an die gerade Linie a , nach der positiven Richtung hin, $\frac{3}{4}a$ an, dessen Construction man wie 2) findet.

§. 125.

Aufgabe. Man construire $a \cdot b$.

Auflösung. Der Ausdruck ab , wenn a und b gerade Linien sind, kann, für sich allein genommen, nicht construirt werden; denn a mit b multipliciren heisst, aus a eine Grösse erzeugen, wie b aus 1 entstanden ist. Gesetzt nun, a sei eine gerade Linie und b eine Zahl, so ist bekannt, wie b aus 1 entstanden ist, und man kann das Product ab so construiren, wie §. 124. gezeigt wurde. Ist aber b auch eine gerade Linie, so mangelt die Einheit, aus der b als erzeugt vorgestellt wird, folglich kann man auch ab aus a nach b nicht ableiten.

Soll jedoch der Ausdruck ab , wenn a und b gerade Linien sind, construirbar werden, so muss noch ein Drittes, die Einheit (eine bestimmte Linie), gegeben sein. In diesem Falle ist dann $1 : b = a : ab$, d. i.

$\frac{ab}{1}$ würde die vierte geometrische Proportionallinie zu

1, b und a sein. Die Construction von $\frac{ab}{1}$ geschieht

dann nach §. 82. 2. Man construire nämlich (Fig. 91.) einen Winkel BAC , nehme AD als die Einheit, und mache $AG = b$ und $DF = a$, so wird, wenn man DG ,

und $FH \parallel DG$ zieht, $GH = \frac{ab}{1}$ für $AD = 1$.

§. 126.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{ab}{c}$ construirt.

Auflösung. Hier ist $cx = ab$ und
 $c : a = b : x$.

Es ist also x die vierte geometrische Proportional-
 linie zu c , a und b . Die Construction dieses Ausdruckes
 gibt §. 82. 2.

Zusatz. Ist $x = a^2$ zu construiren, so setze
 man, indem man die Längeneinheit 1 als gegeben be-
 trachtet,

$$x = \frac{a^2}{1}, \text{ daher}$$

$$1 \cdot x = a \cdot a \text{ und}$$

$$1 : a = a : x.$$

Man erhält also x als dritte geometrische Propor-
 tionallinie zur Einheit 1 und a . Die Construction ge-
 schieht nach §. 82. 2., nur ist zu bemerken, dass für
 diesen Fall (Fig. 91.) $AG = DF = a$ gemacht wer-
 den muss.

§. 127.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{abc}{de}$ construirt.

Auflösung. Man setze $y = \frac{ab}{d}$, also ist

$$x = \frac{yc}{e} \text{ und } ex = yc, \text{ mithin}$$

$$e : y = c : x, \text{ so wird, wenn man } DG$$

foglich ist x die vierte Proportionallinie von e , y
 und c .

Der Ausdruck $y = \frac{ab}{d}$ lässt sich nach §. 126. und

hierauf $x = \frac{yc}{e}$ nach demselben §. construiren.

Zusatz. Soll $x = \frac{abc}{m}$ construirt werden, so setze man $y = \frac{ab}{m}$ also $m : a = b : y$, und man findet y nach §. 126. Hierauf ist $x = \frac{y \cdot c}{1}$, dessen Construction nach §. 125. sich ergibt.

§. 128.

Aufgabe. Es soll $x = \sqrt{a}$ construirt werden.

Auflösung. Wenn $x = \sqrt{a}$ ist, so muss auch $x^2 = a$, und wenn man wieder die Längeneinheit 1 zu Hülfe nimmt,

$$1 : x = x : a \text{ sein.}$$

Es ist also x die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der Längeneinheit 1 und der Linie a . Die Construction geschieht nach §. 89.

I. Zusatz. Soll $y = \sqrt{ab}$ construirt werden, so kann diess ohne Hülfe der Längeneinheit nach §. 89 geschehen, denn es ist dann

$$a : y = y : b. \text{ etc.}$$

II. Zusatz. Dass die Wurzel aus einer Grösse $+$ oder $-$ seyn kann, also bei $x = \sqrt{a}$ (Aufgabe) und $y = \sqrt{ab}$ [Zus. I.] x und y positiv oder negativ werden können, zeigt auch die Construction, indem die mittlere Proportionallinie sowohl über als unter dem Diameter des Kreises, also in zwei entgegengesetzten Richtungen construirt werden kann.

§. 129.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{a^2 - b^2}{d}$ construirt.

Auflösung. $x = \frac{a^2 - b^2}{d} = \frac{[a + b][a - b]}{d}$,

also

$$dx = [a + b][a - b] \text{ und}$$

$$d : a + b = a - b : x, \text{ d. h.}$$

x ist die vierte geometrische Proportionallinie zu d , zur Summe der Linien a und b , und zur Differenz derselben.

§. 130.

Aufgabe. Man construire $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Auflösung. Man construire ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten a und b sind, so wird die Hypotenuse desselben die gesuchte Seite x . Denn es ist nach §. 88. Zus. III. $x^2 = a^2 + b^2$, folglich

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

I. Zusatz. Soll $x = \sqrt{d^2 - a^2}$ construirt werden, so construire man einen rechten Winkel MNO (Fig. 65.) mache $NP = a$, beschreibe mit $PQ = d$ aus P einen Kreisbogen, der den andern Schenkel des Winkels in Q schneidet; dann ist $NQ = x$ die verlangte Linie. Denn nach §. 88. Zus. III. ist

$$x^2 + a^2 = d^2, \text{ also auch } x^2 = d^2 - a^2 \text{ und}$$

$$x = \sqrt{d^2 - a^2}.$$

II. Zusatz. Würde im Ausdrucke $x = \sqrt{d^2 - a^2}$ die Linie a grösser als d , so ist x unmöglich; denn der Kreis, mit d aus P beschrieben, würde den an-

dern Schenkel des Winkels nicht schneiden. [§. 17. II. Zus.]

III. Zusatz. Soll $z = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ construiert werden, so suche man zuerst $q = \sqrt{a^2 + b^2}$ [Aufg.], sodann zum rechtwinkligen Dreiecke, dessen eine Kathete q und die andere c ist, die Hypotenuse, so ist diese die gesuchte Seite z . Denn es ist dann

$$\begin{aligned} z^2 &= q^2 + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2, \text{ folglich} \end{aligned}$$

$$z = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

IV. Zusatz. Soll man $y = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ construiren, so kann diess dadurch geschehen, dass man zuerst $q = \sqrt{a^2 + b^2}$ sucht [Aufg.], und dann ein rechtwinkliges Dreieck construiert, dessen Hypotenuse q und dessen eine Kathete c ist; dann muss die zweite Kathete die verlangte Seite y sein. Denn es ist dann im zuletzt construirten Dreiecke

$$\begin{aligned} y^2 &= q^2 - c^2, \text{ also auch} \\ &= a^2 + b^2 - c^2, \text{ und} \end{aligned}$$

$$y = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}.$$

V. Zusatz. Um $m = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$ zu construiren, betrachte man $m = \sqrt{a^2 + [\frac{b}{2}]^2}$, welches mit obigem Ausdrucke einerlei ist, und construire die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen beide Katheten a und $\frac{b}{2}$ sind. Die Construction von $n = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$ oder $n = \sqrt{a^2 - [\frac{b}{2}]^2}$ ist, wie im II. Zusatze.

§. 131.

Aufgabe. Man soll $x = \sqrt{2}$ construiren.

Auflösung. Hier muss wieder irgend eine Längeneinheit $= 1$, als Mass, gegeben sein. Es wird also

$$x^2 = 2, \text{ folglich}$$

$$1 : x = x : 2.$$

Man finde demnach zur Länge 1 und zur Länge 2 die mittlere geometrische Proportionallinie [§. 89.].

I. Zusatz. Soll man $x = \sqrt{3}$ construiren, so setze man wieder die Längeneinheit $= 1$, und es ist, aus

$$x = \sqrt{3}, x^2 = 3, \text{ folglich}$$

$$1 : x : 3, \text{ d. i.}$$

die Linie x ist zwischen den Längen 1 und 3 die mittlere Proportionale.

Auf ähnliche Art findet man die Construction von $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ etc.

II. Zusatz. Lässt sich die Zahl unter dem Wurzelzeichen in Factoren zerlegen, so wird die Construction etwas einfacher. Z. B. wenn $x = \sqrt{28}$, so ist auch $x^2 = 4 \cdot 7$, also

$$4 : x : 7. \text{ etc.}$$

§. 132.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{1}{2} a \sqrt{5}$ construirt.

Auflösung.

Es ist $x = \frac{1}{2} a \sqrt{5} = \sqrt{\frac{5}{4} a^2} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4} a^2} = \sqrt{a^2 + [\frac{1}{2} a]^2}$, d. h. x ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Kathete a und dessen andere Kathete $\frac{1}{2} a$ ist.

Zusatz. Um $x = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$ zu construiren, setze man $x = \frac{1}{2} a \sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{4} a^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4} a^2} =$

$\sqrt{a^2 - [\frac{1}{2} a]^2}$. und es ist x die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, wovon a die Hypotenuse und $\frac{1}{2} a$ eine Kathete ist.

§. 133.

Aufgabe. Man soll $x = \frac{1}{2} a (\sqrt{5} - 1)$ construiren.

Auflösung. Es ist $x = \frac{1}{2} a (\sqrt{5} - 1) = \frac{1}{2} a \sqrt{5} - \frac{1}{2} a$. Um diesen letzten Ausdruck zu construiren, schneide man von der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen beide Katheten a und $\frac{1}{2} a$ (§. 132.) sind, die Länge $\frac{1}{2} a$ ab.

§. 134.

Aufgabe. Man construire $x = \frac{a^2 + b^2}{d}$.

Auflösung. Man setze $a^2 + b^2 = y^2$, so ist $x = \frac{a^2 + b^2}{d} = \frac{y^2}{d}$. Die Construction von $y = \sqrt{a^2 + b^2}$ findet man aus §. 130., und die für $x = \frac{y^2}{d}$ aus §. 89. indem aus $x = \frac{y^2}{d}$ die Proportion $d : y : x$ entsteht.

Zusatz. Die Construction von $x = \frac{a^2 - b^2}{d}$ kann man, ausser der in §. 129. gezeigten Methode, auch auf obige Art vornehmen, nur ist $a^2 - b^2 = y^2$ zu setzen, und y zuerst nach §. 130. Zus. I. zu construiren.

§. 135.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{a^2 b - bc^2}{ad} = \frac{ab}{d} - \frac{bc^2}{ad}$ construiert.

Auflösung. Man setze $\frac{ab}{d} = y$, dessen Construction aus §. 126. bekannt ist. Das zweite Glied $\frac{bc^2}{ad} = v$ wird so gefunden:

Man setze $\frac{bc}{a} = z$, construire z nach §. 126., und dann ist $\frac{bc^2}{ad} = \frac{zc}{d} = v$, also kann auch v nach §. 126. construiert werden. Daher

$$x = y - v. \quad [\text{§. 123. Zus. I.}]$$

§. 136.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{abc + def}{ab + cd}$ construiert.

Auflösung. Hier setze man $ab + cd = ay$; hieraus folgt: $y = \frac{ab + cd}{a} = b + \frac{cd}{a}$, und es kann nach dem Bisherigen, y construiert werden [§. 126. und 123.].

Nun setze man $x = \frac{abc + def}{ay} = \frac{bc}{y} + \frac{def}{ay}$, so lassen sich die beiden Längen $\frac{bc}{y}$ und $\frac{def}{ay}$ nach §. 126. 127. und nach §. 123. auch x selbst construiren.

§. 137.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{abc - def}{ab - cd}$ construiert.

Auflösung. Man setze hier $ab - cd = ay$,
woraus $y = b - \frac{cd}{a}$. Daraus kann man y finden
[§. 126. u. 123.].

Nun setze man $x = \frac{abc - def}{ay} = \frac{bc}{y} - \frac{def}{ay}$, so
lassen sich beide Längen $\frac{bc}{y}$ und $\frac{def}{ay}$ [nach §. 126. 127.
u. 123.], folglich auch x construiren.

§. 138.

Aufgabe. Es werde $x = \frac{abc^2 - a^2 b^2}{abc + c^3}$ con-
struiert.

Auflösung. Man setze $\frac{ab}{c} = y$, also $c : a$
 $= b : y$, und finde daraus y [§. 82. 2.]. Aus

$$x = \frac{abc^2 - a^2 b^2}{abc + c^3} \text{ wird dann}$$

$$x = \frac{ab [c^2 - ab]}{c [ab + c^2]} = \frac{cy [c^2 - cy]}{c [cy + c^2]}$$

$$= \frac{c^2 y [c - y]}{c^2 [c + y]} = \frac{y [c - y]}{c + y}, \text{ also auch}$$

$c + y : c - y = y : x$, woraus x nach §. 82. 2.
construiert werden kann.

§. 139.

Aufgabe. Es werde $x = \sqrt{\frac{ab^2 + cd}{b + c}}$ con-
struiert.

Auflösung. Hier setze man $\frac{ab^2 + cd^2}{b + c} = ay$,

also $y = \frac{b^2}{b + c} + \frac{cd^2}{a [b + c]}$. Ferner setze man

$\frac{b^2}{b + c} = z$, also $b + c : b : z$, woraus z nach §. 82. 2., wie §. 126. Zus. construirt werden kann.

In $\frac{cd^2}{a [b + c]} = v$ setze man $\frac{cd}{a} = p$ und construire p nach §. 126. Es ist dann $\frac{cd^2}{a [b + c]} = \frac{pd}{b + c} = v$, woraus $b + c : p = d : v$ ist, und v wie oben nach §. 82. 2. construirt werden kann.

Es ist demnach $y = z + v$ und $ay = a [z + v]$, mithin $x = \sqrt{a (z + v)}$ oder $x^2 = a [z + v]$, also auch $a : x : z + v$, d. h.

x ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen a und $z + v$ [§. 89.]. Da z und v durch die Längen a, b, c und d bestimmt wurden, so ist also auch x die gesuchte Länge nach dem Masse der Längen a, b, c, d .

§. 140.

Aufgabe. Es werde $x = \sqrt{ac + bd}$ construirt.

Auflösung. Hier setze man $bd = ay$, also $y = \frac{bd}{a}$, und es wird dann

$$x = \sqrt{ac + ay}$$

$$\text{oder } x = \sqrt{a (c + y)}.$$

Nun lässt sich $y = \frac{bd}{a}$, indem $a : b = d : y$ ist,

nach §. 82. 2. construiren. Da ferner auch $x^2 = a(c + y)$ also auch $a : x : c + y$ ist, kann x nach §. 89. als mittlere geometrische Proportionallinie zwischen a und $c + y$ construirt werden.

§. 141.

Aufgabe. Man soll $x = \sqrt{a^2 + bc + \frac{def}{g}}$

construiren.

Auflösung. Man setze $bc = m^2$, so findet man $m = \sqrt{bc}$, und dieses ist nach §. 89. zu construiren.

Ferner setze man $\frac{def}{g} = n^2$, also $n = \sqrt{\frac{def}{g}}$. Hier suche man zuerst $\frac{de}{g}$ [§. 126.], sodann die mittlere geo-

metrische Proportionallinie n zwischen $\frac{de}{g}$ und f , indem $n^2 = \frac{def}{g}$, also $f : n : \frac{de}{g}$ ist [§. 89.].

Hat man nun m und n gefunden, so ist

$$x = \sqrt{a^2 + bc + \frac{def}{g}} = \sqrt{a^2 + m^2 + n^2} \text{ nach}$$

§. 130. Zus. III. leicht zu construiren.

§. 142.

Aufgabe. Man construire $x = \sqrt{\frac{abcd}{eg}}$.

Auflösung. Man setze $cd = m^2$ und $eg = n^2$; so lässt sich m aus cd und n aus eg construiren [§. 128.

Zus. I.]. Es ist demnach

$$x = \sqrt{\frac{abcd}{eg}} = \sqrt{ab \frac{m^2}{n^2}} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{\frac{m^2}{n^2}} = \frac{m}{n} \sqrt{ab}.$$

Setzt man endlich $\sqrt{ab} = y$, so lässt sich y leicht nach §. 89. construiren, und es ist $x = \frac{my}{n}$, also auch $n : m = y : x$, folglich x selbst durch Construction aus §. 82. 2. zu finden.

[$\frac{16b}{g}$] + Vermischte geometrische Aufgaben.

§. 143.

Aufgabe. In einem Parallelogramme misst die Grundlinie $20' 7''$ und die Höhe $10' 3''$. Man soll ein anderes von gleichem Inhalte mit einer $25'$ langen Grundlinie angeben. Wie gross ist die Höhe zu nehmen?

Auflösung. Die Höhe des verlangten Parallelogramms sei x , sodann wird sein Inhalt, indem seine Grundlinie $25'$ beträgt, $= 25 \cdot x$ [§. 108.]. Der Inhalt des gegebenen Parallelogramms ist $= 20,7 \cdot 10,3$. Da nun gemäss der Aufgabe beide Parallelogramme gleich gross sein sollen, so muss

$$25 x = 20,7 \cdot 10,3, \text{ also}$$

$$x = \frac{20,7 \cdot 10,3}{25} = 8' 2'' \text{ sein.}$$

Es ist demnach die Höhe des verlangten Parallelogramms $8' 2''$.

§. 144.

Aufgabe. (Fig. 111.) Im rechtwinkligen Dreiecke ABC ist $AB = 307'$, die Hypotenuse AC aber um $102'$ grösser, als die andere Kathete BC. Wie gross ist BC und AC?

Auflösung. Im rechtwinkligen Dreiecke ABC sei $AB = 307' = a$, die unbekannte Kathete $BC = x$, folglich die Hypotenuse $AC = BC + 102' = x + n$, wenn $n = 102'$ den Unterschied zwischen der Hypotenuse und der unbekannten Kathete bezeichnet. Nach §. 88. Zus. III. ist.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2, \text{ oder}$$

$$[x + n]^2 = a^2 + x^2, \text{ folglich}$$

$$x^2 + 2nx + n^2 = a^2 + x^2$$

$$2nx = a^2 - n^2$$

$$x = \frac{a^2 - n^2}{2n} = \frac{[a + n][a - n]}{2n}$$

$$\text{Die Hypotenuse } AC = x + n = \frac{a^2 - n^2}{2n} + n =$$

$$= \frac{a^2 + n^2}{2n}$$

Da nun der Angabe gemäss $a = 307'$ und $n = 102'$ ist, so wird

$$BC = x = \frac{(307 + 102)(307 - 102)}{2 \cdot 102}$$

$$= \frac{409 \cdot 205}{204} = 411'$$

Es ist also die andere Kathete $BC = 411'$ und die Hypotenuse $AC = BC + 102 = 513'$.

§. 145.

Aufgabe. (Fig. 111.). Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreieckes ABC sei $60000 \square'$ und die eine Kathete BC um $100'$ grösser als die andere. Wie gross ist jede?

Auflösung. Gesetzt $AB = x$, so ist $BC = x + n$, wenn $n = 100$ den Unterschied beider Katheten

ausdrückt; folglich der Inhalt ($M = 60000 \square'$) des $\triangle ABC$ nach §. 108. Zus. II., oder $M = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} x [x + n]$, also

$$2M = x^2 + nx$$

$$x^2 + nx + \left[\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2 = 2M + \frac{n^2}{4}$$

$$x = -\frac{n}{2} \pm \sqrt{2M + \frac{n^2}{4}}$$

$$= -\frac{n}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{8M + n^2}$$

$$= \frac{-n \pm \sqrt{8M + n^2}}{2}$$

$$\text{Daher } BC = x + n = \frac{-n \pm \sqrt{8M + n^2}}{2}.$$

Substituirt man die Zahlenwerthe, so ist

$$x = \frac{-100 \pm \sqrt{480000 + 10000}}{2} = -50 \pm \frac{700}{2}$$

Also ist die eine Kathete = 300' die andere = 400'.

Da $x = -50 \pm 350 = 300$ oder -400 , also $x + n = 300 + 100 = 400$, oder $-400 + 100 = -300$ ist, so drückt diess aus, dass die beiden Katheten, ausser den Werthen 300' und 400' auch noch die von $-400'$ und $-300'$ d. i. eine entgegengesetzte Lage haben können, wie z. B. $BE = 400'$, entgegengesetzt von AB , und $BD = 300'$, entgegengesetzt von BC (mithin auch das $\triangle DBE$ selbst entgegengesetzt dem $\triangle ABC$).

§. 146.

Aufgabe. In einem rechtwinklig - gleichschenkligen Dreiecke ist die Summe aller Seiten = a ; wie gross jede?

Auflösung. Ist ein Schenkel dieses Drei-

eckes $= x$, so ist die Hypotenuse $= \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$,
folglich

$$2x + x\sqrt{2} = a \text{ und}$$

$$x = \frac{a}{2 \pm \sqrt{2}} = \frac{1}{2} a [2 \mp \sqrt{2}]$$

$$= a [1 \mp \frac{1}{2} \sqrt{2}].$$

Für diese Aufgabe ist $x = a [1 - \frac{1}{2} \sqrt{2}]$.

Es ist also jede Kathete $a [1 - \frac{1}{2} \sqrt{2}]$, folglich die
Hypotenuse $h = \sqrt{x^2 + x^2}$ [§. 88. Zus. III.]

$$= x\sqrt{2} = a [1 - \frac{1}{2} \sqrt{2}] \sqrt{2}$$

$$= a [\sqrt{2} - 1].$$

Sind diese drei Werthe der beiden Katheten und
der Hypotenuse richtig, so muss ihre Summe wieder a
geben. Nämlich:

$$h + x + x = a [\sqrt{2} - 1] + 2a [1 - \frac{1}{2} \sqrt{2}]$$

$$= a \sqrt{2} - a + 2a - a \sqrt{2} = a.$$

Construction. (Fig. 112. a.) Gesetzt $MN = a$
sei der gegebene Perimeter. Man ziehe eine gerade
Linie AQ , mache $AB = a$, und $BC = \frac{1}{2} a$, beschreibe
über AC einen Halbkreis, und errichte in B auf AC die
Senkrechte DB . Endlich beschreibe man mit BD aus
 B einen Kreisbogen, der AB in E schneidet, so ist AE
die verlangte Kathete x , woraus man dann leicht
das in der Aufgabe gegebene Dreieck selbst construi-
ren kann.

Beweis. Es ist gemäss der Construction $BD =$
 $= \sqrt{AB \cdot BC} = \sqrt{\frac{1}{2} a^2} = \frac{a}{2} \sqrt{2} = BE$, ferner $AE =$
 $= AB - BE = a - \frac{a}{2} \sqrt{2} = x$. [Aufl.]

(Fig. 112. b.) Bei der Construction von h setze
man MN und $NO = a$ unter einem rechten Winkel zu-
sammen, ziehe MO , und mache $PO = NO$, so ist $MP =$
 $= MO - PO = a [\sqrt{2} - 1] = h$.

§. 147.

Aufgabe. (Fig. 113.) Die drei Seiten eines Dreieckes sind gegeben, nämlich $AB = c$, $AC = b$ u. $BC = a$. Man soll daraus den Inhalt des Dreieckes finden.

Auflösung. Man fälle die Senkrechte AD .

Es ist $\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} a \cdot AD$.

Um AD zu suchen, betrachte man die beiden rechtwinkligen Dreiecke ABD und ADC , und setze $BD = x$, folglich $DC = a - x$. Es ist nach §. 88. Zus. III.

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = c^2 - x^2$$

$$AD^2 = AC^2 - DC^2 = b^2 - [a - x]^2$$

$$\text{folglich } c^2 - x^2 = b^2 - [a - x]^2$$

$$c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \text{ ist.}$$

Daher

$$AD^2 = c^2 - x^2 = (c + x)(c - x)$$

$$= \left[c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right] \left[c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right]$$

$$= \frac{[2ac + a^2 + c^2 - b^2][2ac - a^2 - c^2 + b^2]}{4a^2}$$

$$= \frac{[(a + c)^2 - b^2][b^2 - (a - c)^2]}{4a^2}$$

$$= \frac{[a + b + c][a + c - b][a + b - c][b + c - a]}{4a^2}, \text{ also}$$

$$AD = \frac{\sqrt{[a + b + c][b + c - a][a + c - b][a + b - c]}}{2a}$$

Folglich das Dreieck oder

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} a \cdot AD$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} a \frac{\sqrt{[(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)]}}{2a}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{[a + b + c][b + c - a][a + c - b][a + b - c]}$$

$$\begin{aligned} \text{Bei } a + b + c &= 2S \\ \text{wird } b + c - a &= 2(S - a) \\ a + c - b &= 2(S - b) \\ a + b - c &= 2(S - c), \text{ also} \end{aligned}$$

$$\triangle ABC = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

I. Zusatz. Ist das Dreieck gleichschenkelig, also $b = c$, so wird aus obiger Formel folgende:

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{4} \sqrt{[a + 2b][2b - a] a \cdot a} \\ &= \frac{a}{4} \sqrt{[2b + a][2b - a]}. \end{aligned}$$

II. Zusatz. Ist das Dreieck gleichseitig, d. i. $a = b = c$, so wird aus obiger Formel

$$\triangle ABC = \frac{1}{4} \sqrt{[3a \cdot a \cdot a]}$$

$$\text{oder } \triangle ABC = \frac{1}{4} \sqrt{3} a^2 = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}.$$

§. 148.

Aufgabe. (Fig. 114.). Eine gerade Linie AB soll im äussern und mittlern Verhältnisse (in extrema et media ratione) getheilt werden, d. h. so, dass sich die ganze Linie zum grössern Theile eben so verhalte, wie dieser grössere Theil zum kleineren, folglich der grössere Abschnitt (Theil) die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der ganzen Linie und ihrem kleineren Theile wird.

1) Auflösung. (synthetisch) An AB setze man die Senkrechte $BD = \frac{1}{2} AB$, ziehe AD, und mache $DE = BD$ und $AC = AE$, so ist

$$AB : AC : CB.$$

Beweis.

Es ist $AD^2 = AB^2 + BD^2$ [§. 88. Zus. III.].

Nun ist $AD = AE + ED = AC + DB$, folglich auch

$$[AC + DB]^2 = AB^2 + BD^2, \text{ oder}$$

$AC^2 + 2 \cdot BD \cdot AC + BD^2 = AB^2 + BD^2$, und da
 $2 \cdot BD = AB$ ist,

$$AC^2 + AB \cdot AC = AB^2, \text{ also}$$

$$AC^2 = AB^2 - AB \cdot AC$$

$$= AB [AB - AC], \text{ oder}$$

$$AC^2 = AB \cdot CB, \text{ folglich auch}$$

$$AB : AC : CB.$$

2) Auflösung. (analytisch) Gesetzt die Auflösung sei geschehen, und AC und CB seien die beiden verlangten Theile. Man setze $AC = x$, also $CB = AB - x = n - x$, wenn $n = AB$ ist.

Es soll dann:

$$n : x = x : n - x \text{ sein, folglich}$$

$$x^2 = n^2 - nx, \text{ oder}$$

$$x^2 + nx = n^2, \text{ woraus}$$

$$x = -\frac{1}{2}n \pm \sqrt{n^2 + \frac{1}{4}n^2}$$

$= \frac{1}{2}n [\sqrt{5} - 1]$, indem hier nur das Zeichen $+$ vor der Wurzelgrösse genommen werden kann.

Um obigen Ausdruck, $x = \frac{1}{2}n [\sqrt{5} - 1]$, zu construiren, nehme man jenen, nämlich

$$x = -\frac{1}{2}n + \sqrt{n^2 + \frac{1}{4}n^2}$$

$= \sqrt{n^2 + (\frac{1}{2}n)^2} - \frac{1}{2}n$, d. h. man construire $\sqrt{n^2 + (\frac{1}{2}n)^2}$ (d. i. die Hypotenuse AD eines rechtwinkligen Dreieckes ABD, dessen eine Kathete $AB = n$ und dessen andere $BD = \frac{1}{2}n$ ist) und nehme davon $DE = \frac{1}{2}n$ weg, so ist $AE = AC = AD - DE = \sqrt{n^2 + \frac{1}{4}n^2} - \frac{1}{2}n = x$, folglich AE oder AC der grössere Abschnitt.

Man theilt demnach eine gerade Linie $AB = n$ nach dem äussern und mittlern Verhältnisse, indem

man auf ihr in B ihre Hälfte $DB = \frac{1}{2} n$ senkrecht errichtet, sodann AD zieht, und davon AE dadurch abschneidet, indem man mit DB aus D einen Kreisbogen EB zieht. Es ist dann AE, oder auch AC, wenn man mit AE aus A den Bogen EC beschreibt, der grössere und CB der kleinere verlangte Theil der Linie AB.

§. 149.

Aufgabe. (Fig. 115.) Aus der Seite $AB = a$ eines regulären Vieleckes in einem Kreise, und dem Radius r dieses Kreises die Seite $FG = b$ des gleichnamigen regulären Vieleckes um den Kreis zu finden.

Auflösung. Gesetzt $AB = a$ sei die Seite des regulären n Eckes im Kreise. Man fälle CD senkrecht auf AB und construire die Tangente FG für den Punct D, welche durch die verlängerten Radien AC und BC in F und G geschnitten wird. Die Linie FG ist dann die verlangte Seite des regulären n Eckes um den Kreis.

Es ist $\triangle FGC \sim \triangle ABC$, dann

$$CE = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 r^2 - a^2}, \text{ ferner}$$

$$AB : FG = CE : CD \text{ [§. 91.], oder}$$

$$a : b = \frac{1}{2} \sqrt{4 r^2 - a^2} : r, \text{ woraus}$$

$$b = \frac{2 ar}{\sqrt{4 r^2 - a^2}} = \frac{2 ar \sqrt{4 r^2 - a^2}}{4 r^2 - a^2}$$

$$b = \frac{2 ar \sqrt{(2 r + a)(2 r - a)}}{[2 r + a][2 r - a]}.$$

Zusatz. Will man umgekehrt aus der Seite $FG = b$ eines regulären n Eckes um den Kreis und aus dessen Radius r die Seite $AB = a$ des regulären n Eckes im Kreise finden, so ist aus obiger Proportion

$$AB : FG = CE : CD \text{ oder}$$

$$a : b = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2} : r$$

$$a = \frac{b}{r} \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2}$$

$$\frac{a^2 r^2}{b^2} = r^2 - \frac{1}{4} a^2$$

$$\frac{a^2 r^2}{b^2} + \frac{a^2}{4} = r^2$$

$$4 a^2 r^2 + a^2 b^2 = 4 b^2 r^2$$

$$a [4 r^2 + b^2] = 4 b^2 r^2$$

$$a = \sqrt{\frac{4 b^2 r^2}{4 r^2 + b^2}} = \frac{2 br}{\sqrt{4 r^2 + b^2}}$$

$$= \frac{2 br \sqrt{4 r^2 + b^2}}{4 r^2 + b^2}.$$

§. 150.

Aufgabe. Der Radius r eines Kreises ist gegeben. Man soll die Seite des regulären Dreieckes in und um den Kreis finden.

Auflösung. 1) Es ist nach §. 72. die Seite eines regulären Sechseckes im Kreise dem Radius gleich; ferner nach §. 94. Zus. II.

$$a = \frac{b}{r} \sqrt{4 r^2 - b^2}$$

die Formel, um aus der Seite eines regulären $2n$ Eckes im Kreise, dessen Radius r ist, die des regulären n Eckes in demselben Kreise zu finden. Es ist also für die Seite des regulären Dreieckes im Kreise

$$a = \frac{b}{r} \sqrt{4 r^2 - b^2} \text{ und, da } b = r \text{ ist,}$$

$$a = \frac{r}{r} \sqrt{(4r^2 - r^2)} = r\sqrt{3}.$$

Für den Radius $r = 1$ ist $a = 1,73205$

Um die Seite des regulären Dreieckes im Kreise oder $a = r\sqrt{3}$, zu construiren, folgere man, aus

$$a = r\sqrt{3}$$

$$a^2 = 3r^2. \text{ Es ist demnach}$$

$3r : a : r$, d. h. die verlangte Seite des Dreieckes ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem dreifachen und einfachen Radius. Ist z. B. [Fig. 116.] . $AB = r$ der Radius des Kreises, so verlängere man AB , und trage auf die Verlängerung $BC = CD = DE = r$ auf, beschreibe endlich über AE einen Halbkreis, und errichte in D die Senkrechte DF , so ist diese die Seite des verlangten Dreieckes (§. 88. Z. II.) und §. 131. Z. I.).

2) Um die Seite des regulären Dreieckes um den Kreis zu finden, nehme man aus §. 149.

$$b = \frac{2ar}{\sqrt{(4r^2 - a^2)}}, \text{ wo } a = r\sqrt{3} \text{ (1.) ist,}$$

$$\text{also } b = \frac{2r^2 \sqrt{3}}{\sqrt{(4r^2 - 3r^2)}} = \frac{2r^2 \sqrt{3}}{r} = 2r\sqrt{3}, \text{ d. h.}$$

die Seite des regulären Dreieckes um den Kreis ist doppelt so gross, als die des regulären Dreieckes im Kreise.

Für den Radius $r = 1$ ist $b = 3,4641$

§. 151.

Aufgabe. Der Radius eines Kreises ist gegeben. Man soll die Seite des Quadrates in, und die des Quadrates um den Kreis finden.

Auflösung. 1.) Die Seite des Quadrates im

Kreise, dessen Radius r ist, ist die Sehne eines Quadranten, folglich (Fig. 81.), wenn $CB = x$ und $CI = IB = r$ ist,

$CB^2 = CI^2 + IB^2$ (§. 88. Zus. III.), also

$$x = \sqrt{(r^2 + r^2)} \\ = r\sqrt{2}.$$

Für den Radius $r = 1$, ist $x = 1,4142 \dots$

Die Construction von $x = r\sqrt{2}$ ist nach §. 131. nicht schwierig.

2.) Die Seite des Quadrates um den Kreis ist der Diameter $= 2r$,

§. 152.

Aufgabe. Die Seite des regulären Zehneckes im Kreise, dessen Radius r ist, zu finden, und zu construiren.

Auflösung. (Fig. 117.) Gesetzt $AB = x$ sei die Seite des regulären Zehneckes im Kreise und $AK = BK = r$ Radien. Man verlängere AB über B , und mache die Verlängerung $BD = BK = r$, und ziehe DK . Indem AB Sehne eines Bogens ist, welcher der zehnte Theil der ganzen Peripherie ist, so muss $\alpha = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$, also $m = \frac{1}{2}(180^\circ - 36^\circ) = 72^\circ = n$ sein.

Da $BD = BK$ ist, so muss auch $p = q = \frac{1}{2}m = 36^\circ$ sein. Es ist also

$$p = \alpha, \text{ ferner} \\ n = n, \text{ folglich}$$

$\triangle ADK \sim \triangle ABK$ (§. 84.). Daher

$AD : AK = AK : AB$, oder

$$x + r : r = r : x, \text{ folglich}$$

$$x^2 + rx = r^2$$

$$x^2 + r x + \left[\frac{r}{2}\right]^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} = \frac{5}{4} r^2$$

$$x + \frac{r}{2} = \frac{r}{2} \sqrt{5}$$

$$x = \frac{r}{2} \sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1),$$

welcher Ausdruck sich nach §. 133. oder §. 148. 2 leicht construiren lässt. Man errichte nämlich, Fig. 118., auf dem Endpunkte des Radius $MN = r$ die Senkrechte $NO = \frac{1}{2} r$, beschreibe mit NO aus O den Bogen QN , so ist MQ oder MP , wenn man mit MQ aus M den Bogen PR beschreibt, die verlangte Seite x .

Es ist klar, dass durch diese Construction der Radius $MN = r$ nach dem äusseren und mittleren Verhältnisse getheilt ist (§. 148.), und dass sein grösserer Abschnitt $MR = MQ = MP = x$ die Seite des regulären Zehneckes im Kreise ist.

§. 153.

Aufgabe. Die Seite des regulären Zehneckes um einen Kreis zu finden, dessen Radius r ist.

Auflösung. Nach §. 149. ist aus der Seite a eines regulären n Eckes im Kreise die Seite des regulären n Eckes um den Kreis, oder

$$b = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}}, \text{ oder } b^2 = \frac{4a^2 r^2}{4r^2 - a^2}.$$

Da für das reguläre Zehneck $a = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1)$, folglich

$$a^2 = \frac{r^2}{4} (5 - 2\sqrt{5} + 1) = \frac{r^2}{2} (3 - \sqrt{5}), \text{ dann}$$

$$4a^2 r^2 = 2r^4 (3 - \sqrt{5}); \text{ ferner}$$

$$\begin{aligned} 4r^2 - a^2 &= 4r^2 - \frac{r^2}{2} (3 - \sqrt{5}) = 4r^2 - \frac{3}{2} r^2 + \frac{r^2}{2} \sqrt{5} \\ &= \frac{r^2}{2} (5 + \sqrt{5}) \text{ ist, so muss} \end{aligned}$$

$$b^2 = \frac{4a^2 r^2}{4r^2 - a^2} = \frac{2r^4 (3 - \sqrt{5})}{\frac{r^2}{2} (5 + \sqrt{5})} = \frac{4r^2 (3 - \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}{25 - 5}$$

$$b^2 = \frac{1}{5} r^2 (20 - 8 \sqrt{5}) = \frac{4}{5} r^2 (5 - 2 \sqrt{5}), \text{ also} \\ b = 2r \sqrt{1 - \frac{2}{5} \sqrt{5}} \text{ sein.}$$

Die Construction der Seite des regulären Zehneckes um den Kreis kann am Einfachsten durch die Seite des regulären Zehneckes im Kreise auf die Art geschehen, wie überhaupt in der Auflösung des §. 149. gezeigt wurde.

§. 154.

Aufgabe. Die Seite des regulären Fünfeckes im Kreise zu suchen und zu construiren.

Auflösung. Es ist bekannt, dass die Seite des regulären Zehneckes im Kreise oder $b = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1)$ ist (§. 152.). Ferner kann man durch

$$a = \frac{b}{r} \sqrt{4r^2 - b^2} \quad (\text{§. 94. Zus. II.})$$

aus der Seite des regulären $2n$ Eckes die des regulären n Eckes in demselben Kreise oder a finden. Da in dieser Aufgabe $b = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1)$ die Seite des regulären Zehneckes ist, so erhält man durch Substitution des Werthes von b in obige Formel die Seite des regulären Fünfeckes.

Es ist nämlich, da $a = \frac{b}{r} \sqrt{4r^2 - b^2}$ ist, auch

$$a^2 r^2 = b^2 (4r^2 - b^2).$$

$$\text{Nun ist } b^2 = \frac{r^2}{4} (\sqrt{5} - 1)^2 = \frac{r^2}{2} (3 - \sqrt{5}),$$

$$\text{ferner } 4r^2 - b^2 = 4r^2 - \frac{r^2}{2} (3 - \sqrt{5}) = \frac{r^2}{2} (5 + \sqrt{5}).$$

$$\text{Daher } a^2 r^2 = \frac{r^2}{2} (3 - \sqrt{5}) \frac{r^2}{2} (5 + \sqrt{5})$$

$$a^2 = \frac{r^2}{4} (10 - 2\sqrt{5}) = \frac{r^2}{2} (5 - \sqrt{5}),$$

$$\text{folglich } a = r \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}.$$

Construction. (Fig. 119.) Man errichte $CB = r$ senkrecht auf der Mitte des Diameters AF , halbire BF in D , und beschreibe mit der von C nach D gezogenen geraden Linie, den Kreisbogen CE , so ist EB die Seite des regulären Zehneckes und CE die des regulären Fünfeckes im Kreise um B .

Beweis. Da $BC = r$, $BD = \frac{1}{2}r$ und $CD = \frac{r}{2}\sqrt{5}$, so ist $EB = ED - BD = CD - BD = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$ die Seite des regulären Zehneckes (§. 152.).

Ferner ist $CE^2 = BC^2 + EB^2$

$$= r^2 + \frac{r^2}{4} (5 - 2\sqrt{5} + 1)$$

$$= r^2 + \frac{r^2}{2} (3 - \sqrt{5})$$

$$= \frac{5}{2}r^2 - \frac{r^2}{2}\sqrt{5}$$

$$= r^2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right), \text{ folglich}$$

$CE = r \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right)}$ die Seite des regulären Fünfeckes.

§. 155.

Aufgabe, Um einen Kreis, dessen Halbmesser r ist, werde ein zweiter concentrischer beschrieben, so dass der Flächeninhalt des Ringes zwischen beiden Kreisen $= m$ werde; es ist der Radius des grösseren Kreises zu berechnen.

Auflösung. Ist x der Radius des zu suchenden Kreises, so ist $x^2\pi$ seine Fläche. Der Ring, dessen Inhalt $= m$ werden soll, gleicht dem Unterschiede zwischen dem grösseren und kleineren Kreise, daher

$$x^2\pi - r^2\pi = m, \text{ woraus}$$

$$x = \sqrt{\left[\frac{m}{\pi} + r^2 \right]} \text{ ist.}$$

Beispiel. Ist $r = 39' 8''$, $m = 385 \square'$, so wird $x = 41' 3''$.

§. 156.

Aufgabe. Ein Dreieck, dessen Grundlinie $= b$, und dessen Höhe $= h$ gegeben ist, soll in ein Parallelogramm verwandelt werden, dessen Grundlinie m ist; man suche die dazugehörige Höhe x .

Auflösung. Die Dreiecksfläche ist $= \frac{1}{2} bh$, die Fläche des Parallelogrammes mx , folglich ist

$$mx = \frac{1}{2} bh \text{ und}$$

$$x = \frac{bh}{2m} \text{ die gesuchte Höhe. Will man die}$$

Höhe construiren, so kann diess nach §. 126. geschehen,

denn es ist aus $x = \frac{bh}{2m}$, auch $2m : b = h : x$ etc.

§. 157.

Aufgabe. Es werde ein rechtwinkliges Dreieck construirt, dessen eine Kathete die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der Hypotenuse und der anderen Kathete ist.

Auflösung. Gesetzt die erstere Kathete sei x , die Hypotenuse h , dann ist die andere Kathete $= \sqrt{h^2 - x^2}$. Nach den Bedingungen der Aufgabe wird

$$h : \sqrt{h^2 - x^2} : x, \text{ daher}$$

$$hx = h^2 - x^2$$

$$x^2 + hx = h^2$$

$$x = -\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{5h^2}{4}} = -\frac{h}{2} + \frac{h}{2} \sqrt{5}$$

$$\text{oder } x = \frac{h}{2} [\sqrt{5} - 1], \text{ dessen Construction sich}$$

aus §. 133. ergibt unter der Voraussetzung, dass h eine bekannte Länge ist. Hat man x , so errichte man auf ihr in einem Endpunkte eine Senkrechte und schneide diese mit h aus dem andern Endpunkte ab, so erhält man das verlangte Dreieck.

§. 158.

Aufgabe. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes ist m , der Perimeter desselben p ; wie gross ist jede Seite dieses Dreieckes?

Auflösung. Da in dieser Aufgabe drei unbekannte Grössen vorkommen, so ist es vor Allem nöthig, drei Gleichungen aus den Bedingungen der Aufgabe zu entwickeln. Es ist nämlich für den Inhalt dieses rechtwinkligen Dreieckes, wenn x und y die beiden Katheten und z die Hypotenuse ausdrückt,

$$\text{I. } \frac{xy}{2} = m.$$

Da der Perimeter d i. die Summe der drei Seiten des Dreieckes p ist, so muss

$$\text{II. } x + y + z = p \text{ sein.}$$

Nach §. 88. Zus. III. ist ferner

$$\text{III. } x^2 + y^2 = z^2.$$

Aus II. ist $x + y = p - z$, folglich

$$x^2 + 2xy + y^2 = p^2 - 2pz + z^2$$

$$\underline{x^2 + y^2 = z^2} \text{ [III.]}$$

$$2xy = p^2 - 2pz, \text{ und, da } 2xy = 4m \text{ [I.] ist,}$$

$$4m = p^2 - 2pz, \text{ folglich } z = \frac{p^2 - 4m}{2p}.$$

Aus I. ist auch $x = \frac{2m}{y}$, folglich nach II. oder

$$x + y + z = p$$

$$\frac{2m}{y} + y + \frac{p^2 - 4m}{2p} = p$$

$$4pm + 2py^2 + p^2y - 4my = 2p^2y$$

$$2py^2 - p^2y - 4my = -4pm$$

$$y^2 - \frac{p^2 + 4m}{2p}y = -2m, \text{ woraus}$$

$$y = \frac{p^2 + 4m}{4p} \pm \sqrt{\left(\frac{p^4 + 8p^2m + 16m^2}{16p^2} - 2m\right)}$$

$$= \frac{p^2 + 4m}{4p} \pm \sqrt{\left(\frac{p^4 - 24p^2m + 16m^2}{16p^2}\right)}$$

$$= \frac{p^2 + 4m \pm \sqrt{p^4 - 24p^2m + 16m^2}}{4p}$$

Nun ist x zu finden. Es ist nämlich aus II.

$$x = p - [y + z]$$

$$= p - \left(\frac{p^2 + 4m \pm \sqrt{p^4 - 24p^2m + 16m^2}}{4p} + \frac{p^2 - 4m}{2p} \right)$$

$$= \frac{4p^2 - p^2 - 4m \mp \sqrt{p^4 - 24p^2m + 16m^2} - 2p^2 + 8m}{4p}$$

$$= \frac{p^2 + 4m \mp \sqrt{p^4 - 24p^2m + 16m^2}}{4p}$$

Es sind demnach

$$x = \frac{p^2 + 4m \mp \sqrt{p^4 - 24p^2m + 16m^2}}{4p}$$

$$y = \frac{p^2 + 4m \pm \sqrt{p^4 - 24p^2m + 16m^2}}{4p}$$

$$z = \frac{p^2 - 4m}{2p} = \frac{1}{2}p - \frac{2m}{p}$$

die drei Seiten des Dreieckes, welche den, in den drei Gleichungen I, II und III ausgedrückten Bedingungen entsprechen. Als Probe und zugleich zur Uebung im Calcul möge der Anfänger die Substitution obiger Werthe von x, y und z in diese Gleichungen wirklich vornehmen, wo dann das halbe Product aus den Werthen von x, und y die Grösse m, die Summe der Werthe von x, y und z aber p, so wie die Summe der Quadrate der

Werthe von x und y das Quadrat des Werthes von z geben muss.

§. 159.

Aufgabe. (Fig. 120. und 121.) In einem Dreiecke ABC sind die aus den Spitzen desselben auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendikel gegeben; man soll daraus die Seiten und den Inhalt des Dreieckes finden.

Auflösung. Man setze (Fig. 120. und 121), das Perpendikel $BD = a$, $CE = b$ und $AF = c$, die Seite $AB = x$, $AC = y$ und $BC = z$. Nach §. 147. ist der Inhalt des Dreieckes ABC, oder

$$\triangle ABC = \frac{1}{4} \sqrt{[(x+y+z)(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)]}$$

Da $\angle ADB = \angle AEC = R$ und der Winkel A gemeinschaftlich, mithin $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ ist, so muss

$$BD : AB = CE : AC, \text{ oder}$$

$$a : x = b : y, \text{ woraus}$$

$$y = \frac{bx}{a} \text{ ist.}$$

Auch ist $\triangle CBE \sim \triangle ABF$, folglich

$$AF : AB = CE : BC, \text{ oder}$$

$$c : x = b : z, \text{ woraus}$$

$$z = \frac{bx}{c} \text{ ist.}$$

Bringt man diese Werthe für y und z in obige Gleichung für das Dreieck ABC, so ist $\triangle ABC$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{\left(x + \frac{bx}{a} - \frac{bx}{c}\right) \left(x + \frac{bx}{a} - \frac{bx}{c}\right) \left(x - \frac{bx}{c} - \frac{bx}{a}\right) \left(\frac{bx}{c} + \frac{bx}{a} - x\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left(x \frac{ac+bc+ab}{ac} - x \frac{ac+bc-ab}{ac} - x \frac{ac+ab-bc}{ac} + x \frac{ab+bc-ac}{ac}\right)}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{x^4}{a^4 c^4} (ac+bc+ab)(ac+bc-ab)(ac+ab-bc)(ab+bc-ac) \right)}$$

$$= \frac{x^2}{4a^2 c^2} \left(\sqrt{(ac+bc+ab)(ac+bc-ab)(ac+ab-bc)(ab+bc-ac)} \right)$$

Man benenne das, was nach dem Wurzelzeichen steht, durch M, so wird

$$\triangle ABC = \frac{x^2}{4a^2 c^2} \sqrt{M}. \text{ Auch ist}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} bx, \text{ folglich}$$

$$\frac{1}{2} bx = \frac{x^2 \sqrt{M}}{4a^2 c^2}, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{2a^2 bc^2}{\sqrt{M}} = \frac{2a^2 bc^2 \sqrt{M}}{M}.$$

Man kann nun leicht die beiden andern Seiten des Dreieckes finden, wenn man den gefundenen Werth von x in obige Gleichungen $y = \frac{bx}{a}$ und $z = \frac{bx}{c}$ bringt. Es ist nämlich

$$y = \frac{2ab^2 c^2}{\sqrt{M}} = \frac{2ab^2 c^2 \sqrt{M}}{M} \text{ und}$$

$$z = \frac{2a^2 b^2 c}{\sqrt{M}} = \frac{2a^2 b^2 c \sqrt{M}}{M}.$$

Endlich ist der Inhalt des Dreieckes, oder

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} bx = \frac{a^2 b^2 c^2}{\sqrt{M}} = \frac{a^2 b^2 c^2 \sqrt{M}}{M}.$$

§. 160.

Aufgabe. (Fig. 122.) Ein Dreieck ABC durch eine gerade Linie, die durch einen gegebenen Punct D der Seite AB geht, in zwei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Gesetzt ED sei die Theilungslinie, dann $AB = a$, $AD = c$, $AC = b$ und $AE = x$. Man fälle EH und CI auf AB senkrecht, so ist $\triangle AEH \sim \triangle ACI$ [§. 84.], mithin

$$AE : AC = EH : CI \text{ und auch}$$

$$AE \cdot AD : AC \cdot AB = EH \cdot AD : CI \cdot AB, \text{ oder}$$

$$x \cdot c : b \cdot a = \triangle AED : \triangle ABC [\S. 78.]$$

$$xc : ab = 1 : 2, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{ab}{2c}$$

Es ist also der Punct E von A in einer solchen Entfernung zu nehmen, als $AE = x = \frac{ab}{2c}$ ausdrückt.

Construction. Um $x = \frac{ab}{2c}$ durch Construction zu finden, folgere man daraus

$c : \frac{1}{2}a = b : x$, d. h.
die Linie x ist die vierte geometrische Proportionallinie zwischen c, $\frac{1}{2}a$ und b.

Man theile daher $AB = a$ in zwei gleiche Theile, ziehe CD und durch F die Linie $FE \parallel CD$, so ist

$$AD : AF = AC : AE, \text{ oder}$$

$$c : \frac{1}{2}a = b : AE, \text{ folglich } AE = x.$$

I. Zusatz. Auf ähnliche Art verfährt man, um ein Dreieck von einem Puncte aus so zu theilen, dass sich das ganze Dreieck zum Theile verhält, wie $m : n$.

Fände man $x > AC$, so kann die Theilungslinie die Seite AC nicht treffen, wohl aber die Seite CB, und die Theilungslinie wird irgend eine andere Linie DK. Also ist gemäss der vorigen Auflösung, wenn $BK = z$ und $BC = d$ ist.

$$\triangle ABC : \triangle BDK = AB \cdot CB : BD \cdot BK$$

$$= a \cdot d : [a - c] \cdot z.$$

Nach der Voraussetzung soll $\triangle ABC : \triangle ACKD = m : n$, folglich

$$\triangle ABC : \triangle BDK = m : m - n, \text{ also auch}$$

$$m : m - n = ad : (a - c) z, \text{ woraus}$$

$$[a-c] z = \frac{(m-n) ad}{m} \text{ und}$$

$$z = \frac{(m-n) ad}{(a-c) m} \text{ ist.}$$

Diese Grösse trage man von B nach K, und ziehe DK, so wird diese Linie das Dreieck im Verhältnisse $m : n$ theilen.

II. Zusatz. Aus der Auflösung obiger Aufgabe, nämlich aus der Proportion, $xc : ba = \triangle AED : \triangle ABC$ ergibt sich, dass Dreiecke, die einen Winkel gleich haben, sich ihrem Flächeninhalte nach zu einander verhalten, wie die Producte jener zwei Seiten, welche diesen gleichen Winkel einschliessen.

§. 161.

Aufgabe. (Fig. 123.) Im Vierecke ABCD ist der Winkel $A = 90^\circ$, man soll aus seinen vier Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ und $AD = d$ seinen Flächeninhalt finden.

Auflösung. Man setze den zu suchenden Flächeninhalt des Viereckes $= x$, und die Diagonale $BD = m$.

$$\text{Nun ist } m = \sqrt{a^2 + d^2},$$

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} a \cdot d$$

$$\triangle BCD = \frac{1}{4} \sqrt{[(b+c+m)(b+c-m)(b+m-c)(c+m-b)]},$$

$$\text{mithin } \triangle ABD + \triangle BCD = x = \frac{1}{2} a \cdot d + \frac{1}{4} \sqrt{[(b+c+m)(b+c-m)(b+m-c)(c+m-b)]}.$$

§. 162.

Aufgabe. (Fig. 124.) Ein Dreieck ABC durch eine, zu einer Seite des Dreieckes parallele, Linie DE nach einem gegebenen Verhältnisse, $m : n$, zu theilen.

Auflösung. Es ist klar, dass die Auflösung dieser

Aufgabe darin besteht, den Punct D, oder $DB = x$, zu bestimmen.

Da nun $DE \parallel AC$ sein muss, so ist $\triangle BDE \sim \triangle ABC$, folglich, wenn $AB = c$ ist,

$$\begin{aligned}\triangle ABC : \triangle BDE &= AB^2 : BD^2 \\ &= c^2 : x^2 \\ &= m : n. \text{ Mithin}\end{aligned}$$

$$m : n = c^2 : x^2, \text{ woraus}$$

$$x^2 = \frac{nc^2}{m} \text{ und } x = c\sqrt{\frac{n}{m}}.$$

Diese Grösse trage man von B nach D auf, und ziehe durch D eine Parallele mit AC, so ist die Bedingung der Aufgabe erfüllt.

§. 163.

Aufgabe. (Fig. 125.) Die drei Seiten eines Dreieckes ABC sind gegeben; man theile AB in zwei gleiche Theile und ziehe nach dem Theilungspuncte D von der Spitze C die Linie CD. Man soll die Grösse dieser Linie finden.

Auflösung. Gesetzt $AC = b$, $BC = a$, $AD = c$ und $AB = 2c$. Man ziehe die Senkrechte CE, und setze $EB = x$, $DE = c - x$, und $DC = z$.

Betrachtet man die beiden rechtwinkligen Dreiecke CDE und CBE, so ist:

$$\begin{aligned}CE^2 &= CD^2 - DE^2 = z^2 - (c - x)^2 = z^2 - c^2 + 2cx - x^2 \\ CE^2 &= CB^2 - EB^2 = a^2 - x^2,\end{aligned}$$

$$\text{folglich } z^2 - c^2 + 2cx - x^2 = a^2 - x^2, \text{ und}$$

$$2cx = a^2 + c^2 - z^2$$

$$x = \frac{a^2 + c^2 - z^2}{2c}$$

Nun ist auch aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken ACE und BCE

$$CE^2 = CB^2 - EB^2 = a^2 - x^2$$

$$CE^2 = AC^2 - AE^2 = b^2 - (2c - x)^2 = b^2 - 4c^2 + 4cx - x^2.$$

Mithin auch $b^2 - 4c^2 + 4cx - x^2 = a^2 - x^2$, woraus

$$4cx = a^2 + 4c^2 - b^2, \text{ also}$$

$$x = \frac{a^2 + 4c^2 - b^2}{4c} \text{ ist.}$$

Beide Werthe von x zusammengestellt, geben:

$$\frac{a^2 + 4c^2 - b^2}{4c} = \frac{a^2 + c^2 - z^2}{2c}$$

$$a^2 + 4c^2 - b^2 = 2a^2 + 2c^2 - 2z^2$$

$$2z^2 = a^2 + b^2 - 2c^2$$

$$z = \frac{a^2 + b^2 - 2c^2}{2} = DC$$

§. 164.

Aufgabe. (Fig. 111.). Im rechtwinkligen Dreiecke ABC ist die Hypotenuse $AC = b$ und die Summe der Katheten $AB + BC = a$ gegeben; man soll die beiden Katheten selbst finden.

Auflösung. Man setze $AB = x$ und $BC = y$, so ist der Aufgabe gemäss:

$$\text{I. } x + y = a \text{ und}$$

$$\text{II. } x^2 + y^2 = b^2 \text{ (§. 88. Zus. III.).}$$

Aus I. wird $x^2 + 2xy + y^2 = a^2$, davon II. subtrahirt,

$$x^2 + y^2 = b^2, \text{ gibt}$$

$$2xy = a^2 - b^2, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2y} \text{ ist.}$$

Substituirt man diesen Werth von x in I., so ist:

$$\frac{a^2 - b^2}{2y} + y = a$$

$$a^2 - b^2 + 2y^2 = 2ay$$

$$2y^2 - 2ay = b^2 - a^2$$

$$y^2 - ay + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2 - a^2}{4}$$

$$y = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 - a^2} = \frac{1}{2} (a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}).$$

Um nun auch x zu bestimmen, nehme man I. und substituïre für y den so eben gefundenen Werth, nämlich:

$$x = a - y$$

$$= a - \left(\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 - a^2}\right).$$

$$= \frac{a}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 - a^2} = \frac{1}{2} (a \mp \sqrt{2b^2 - a^2})$$

Beispiel. Ist $b = 97'$ und $a = 137'$, so erhält man durch gehörige Substitution $x = 72'$ und $y = 65'$.

§. 165.

Aufgabe. (Fig. 125.) Der Flächeninhalt a eines schiefwinkligen Dreieckes ABC , seine Höhe $CE = h$ und das durch diese abgeschnittene Stück $BE = d$ sind gegeben; man soll jede Seite finden.

Auflösung. Gesetzt $AE = x$, also $AB = x + d$, $AC = y$ und $BC = \sqrt{BE^2 + CE^2} = \sqrt{d^2 + h^2}$.

Ferner ist $\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot h$, oder

$$a = \frac{1}{2} h \cdot AB, \text{ folglich die zweite}$$

$$\text{Seite } \frac{2a}{h} = AB.$$

$$\text{Da nun auch } AB = x + d, \text{ folglich } x + d = \frac{2a}{h}$$

$$\text{und } x = \frac{2a}{h} - d = \frac{2a - hd}{h} \text{ ist, so muss die dritte}$$

Seite, indem $AC^2 = AE^2 + CE^2$ ist, auch

$$y = \sqrt{x^2 + h^2}$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{2a - hd}{h}\right)^2 + h^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{4a^2 - 4ahd + h^2d^2 + h^4}{h^2}}$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{4a^2 - 4ahd + h^2d^2 + h^4}}{h} \text{ sein.}$$

§. 166.

Aufgabe. (Fig. 94.) In einem rechtwinkligen Dreiecke ABC ist die Hypotenuse $BC = a$, und das Verhältniss der beiden Katheten $AB : AC = m : n$ gegeben; man soll beide Katheten finden.

Auflösung. Es sei $AB = x$ und $AC = y$.
Nach §. 88. Zus. III. ist $BC^2 = AB^2 + AC^2$, oder

$$a^2 = x^2 + y^2 \text{ und}$$

$$a^2 - y^2 = x^2.$$

Nun ist der Aufgabe gemäss:

$$x : y = m : n, \text{ also } x = \frac{m}{n} y \text{ und } x^2 = \frac{m^2}{n^2} y^2$$

welcher Werth, in die vorige Gleichung substituirt, die Gleichung

$$\frac{m^2}{n^2} y^2 = a^2 - y^2 \text{ gibt, woraus}$$

$$m^2 y^2 + n^2 y^2 = a^2 n^2$$

$$y^2 = \frac{a^2 n^2}{m^2 + n^2}$$

$$y = \frac{an}{(\sqrt{m^2 + n^2})} = \frac{an \sqrt{m^2 + n^2}}{m^2 + n^2}.$$

Nun ist nach Obigem $x = \frac{m}{n} y$, mithin auch

$$x = \frac{m}{n} \cdot \frac{an \sqrt{m^2 + n^2}}{m^2 + n^2} = \frac{am \sqrt{m^2 + n^2}}{m^2 + n^2}.$$

Beispiel. Für $a = 300'$ und $m : n = 4 : 3$ ergibt sich durch gehörige Substitution $y = 180'$ und $x = 240'$.

§. 167.

Aufgabe. (Fig. 94.) Im rechtwinkligen Dreiecke ABC ist die Hypotenuse $BC = a$ und die Senkrechte vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse, nämlich $AD = p$ gegeben; man soll die dadurch abgeschnittenen Stücke der Hypotenuse und beide Katheten finden.

Auflösung. 1) Gesetzt $BD = x$ und $DC = y$, folglich, indem $x + y = a$ ist, $y = a - x$.

2) Es ist $\triangle ABD \sim \triangle ADC$ (§. 88. 1.), mithin

$$BD : AD : DC \text{ (§. 88. 2.), oder}$$

$$x : p : y, \text{ woraus}$$

$$p^2 = xy = x(a - x) \text{ (1.)}$$

$$p^2 = ax - x^2$$

$$x^2 - ax = -p^2$$

$$x^2 - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - p^2$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - p^2} = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4p^2}$$

$$= \frac{1}{2}[a \pm \sqrt{(a + 2p)(a - 2p)}].$$

3) Da aus 1) $y = a - x$ ist, so muss auch

$$y = a - \left(\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - p^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}a \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - p^2} = \frac{1}{2}[a \mp \sqrt{(a + 2p)(a - 2p)}].$$

4) Nach §. 88. Zus. I. ist:

$$BD : AB : BC, \text{ oder}$$

$$x : AB : a, \text{ also}$$

$$AB^2 = ax = \frac{a}{2}[a \pm \sqrt{(a + 2p)(a - 2p)}] \text{ und}$$

$$AB = \sqrt{\frac{a}{2}[a \pm \sqrt{(a + 2p)(a - 2p)}]}.$$

Ebenso ist für die andere Kathete:

DC : AC : BC, oder

y : AC : a, woraus

$$AC^2 = ay = \frac{a}{2} [a \mp \sqrt{(a+2p)(a-2p)}] \text{ und}$$

$$AC = \sqrt{\frac{a}{2} [(a \mp \sqrt{(a+2p)(a-2p)})]}.$$

Beispiel. Für $a = 75'$ und $p = 36'$ wird $x = 27'$, $y = 42'$, dann $AB = 60'$ und $AC = 45'$.

§. 168.

Aufgabe. (Fig. 111.) In einem rechtwinkligen Dreiecke ABC ist die Hypotenuse $AC = b$, und der Unterschied zwischen beiden Katheten $BC - AB = d$ gegeben; man soll die beiden Katheten BC und AB selbst finden.

Auflösung. Man setze $BC = x$ und $AB = y$. Beschreibt man mit AB aus B den Kreisbogen AG, so ist $GC = BC - BG = BC - AB = x - y = d$, also auch $x = d + y$.

Es ist ferner $x^2 + y^2 = b^2$, also $x^2 = b^2 - y^2$; mithin die neue Gleichung $(d + y)^2 = b^2 - y^2$, oder

$$d^2 + 2dy + y^2 = b^2 - y^2, \text{ woraus}$$

$$2y^2 + 2dy = b^2 - d^2$$

$$y^2 + dy + (\frac{1}{2}d)^2 = \frac{b^2 - d^2}{2} + \frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}d^2$$

$$y = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{(\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}d^2)} = -\frac{1}{2}d \pm \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 - d^2}.$$

Da nun aus Obigem $x = d + y$ ist, so muss auch

$$x = d - \frac{1}{2}d \pm \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 - d^2}$$

$$= \frac{1}{2}d \pm \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 - d^2} = \frac{1}{2}(d \pm \sqrt{2b^2 - d^2})$$

Beispiel. Ist $b = 97'$ und $d = 7'$, so wird $BC = x = 65'$ und $AB = y = 72'$.

§. 169.

Aufgabe. (Fig. 126.) Im Durchmesser AD eines Kreises ist ein Punct P gegeben, wodurch die senkrechte Linie PM gezogen ist; man soll aus A durch MP eine Sehne AB so ziehen, dass EB dem Radius des Kreises gleich oder $EB = AC = r$ werde. Wie gross muss AB werden?

Auflösung. Man setze, da der Punct P gegeben ist, $AP = a$, dann $AC = EB = r$, $AD = 2r$ und $AB = x$, also $AE = AB - EB = x - r$.

Man ziehe BD, und dann BG senkrecht auf AD, so ist:

$$\triangle APE \sim \triangle ABG, \text{ also}$$

$$AE : AP = AB : AG, \text{ oder}$$

$$x - r : a = x : AG, \text{ woraus}$$

$$AG = \frac{ax}{x - r} \text{ ist.}$$

Ferner ist auch $\triangle ABD \sim \triangle ABG$ [§. 88.], mithin

$$AD : AB = AB : AG, \text{ oder}$$

$$2r : x = x : AG, \text{ woraus wieder}$$

$$AG = \frac{x^2}{2r} \text{ ist.}$$

Stellt man beide Werthe von AG zusammen, so ergibt sich:

$$\frac{x^2}{2r} = \frac{ax}{x - r}, \text{ oder}$$

$$x(x - r) = 2ar, \text{ folglich}$$

$$x^2 - rx + \left(\frac{1}{2}r\right)^2 = 2ar + \frac{1}{4}r^2$$

$$x = \frac{1}{2}r \pm \sqrt{2ar + \frac{1}{4}r^2} = \frac{1}{2}[r \pm \sqrt{r(8a + r)}] = AB.$$

§. 170.

Aufgabe. (Fig. 127.) Im Dreiecke ABC sind die Grundlinie $AB = b$ und die Höhe $CD = a$ gegeben; man soll in diesem Dreiecke ein Rechteck EG so zeichnen, dass dessen Flächeninhalt sich zu dem des Dreieckes verhalte, wie $m : n$.

Auflösung. 1) Gesetzt $AB = b$, $CD = a$, so ist $\triangle ABC = \frac{1}{2} a \cdot b$; $EH = ID = x$, $CI = a - x$, $EF = y$.

Es ist $\triangle ABC \sim \triangle EFC$, folglich

$$AB : CD = EF : CI, \text{ oder}$$

$$b : a = y : a - x, \text{ woraus}$$

$$ay = (a - x) b \text{ und } y = \frac{(a - x) b}{a}.$$

Da ferner nach den Bedingungen der Aufgabe

$$EG : \triangle ABC = m : n \text{ oder}$$

$$xy : \frac{1}{2} ab = m : n \text{ sein soll, so ist auch}$$

$$nxy = \frac{1}{2} abm \text{ und}$$

$$y = \frac{abm}{2nx}.$$

Stellt man beide Werthe von y zusammen, so wird

$$\frac{(a - x) b}{a} = \frac{abm}{2nx}, \text{ mithin}$$

$$2 anx - 2 nx^2 = a^2 m$$

$$x^2 - ax = -\frac{a^2 m}{2n}$$

$$x^2 - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2 m}{2n}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 m}{2n}} = \frac{1}{2} a \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2m}{n}} \right] = ID.$$

Durch ID ist der Punct I in CD gefunden, durch welchen man $EF \parallel AB$ ziehen muss.

2) Will man eine besondere Gleichung für die zweite Seite EF des gesuchten Rechteckes angeben, so betrachte man $CI = a - x$ [1.], folglich, da x bekannt ist,

$$CI = a - x = a - \left[\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2} \sqrt{1 - \frac{2m}{n}} \right]$$

$$= \frac{a}{2} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{2m}{n}} \right]. \text{ Ferner ist}$$

aus 1) $y = \frac{(a - x) b}{a}$, also auch

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{2} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{2m}{n}} \right]$$

$$= \frac{b}{2} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{2m}{n}} \right] = EF.$$

§. 171.

Aufgabe. (Fig. 128.) Es sind zwei concentrische Kreise gegeben. Man soll durch dieselben eine gerade Linie so ziehen, dass sich die beiden Sehnen AB und ED verhalten, wie $m : n$.

Auflösung. Man fälle FC senkrecht auf AB.

Durch den Abstand FC der Sehnen vom Mittelpunkte sind diese selbst bestimmt.

Es ist $AF = \frac{1}{2} AB$ und $EF = \frac{1}{2} ED$. Man setze

$AC = R$, $EC = r$, $FC = x$, so ist:

$$AF^2 = AC^2 - FC^2$$

$$= R^2 - x^2; \text{ eben so}$$

$$EF^2 = EC^2 - FC^2$$

$$= r^2 - x^2.$$

Da den Bedingungen der Aufgabe gemäss

AB : ED = m : n sein soll, so ist auch

$$\frac{1}{2} AB : \frac{1}{2} ED = m : n, \text{ oder}$$

AF : EF = m : n und auch

$$AF^2 : EF^2 = m^2 : n^2, \text{ oder}$$

$$R^2 - x^2 : r^2 - x^2 = m^2 : n^2, \text{ woraus}$$

$$R^2 n^2 - x^2 n^2 = r^2 m^2 - x^2 m^2$$

$$x^2 m^2 - x^2 n^2 = r^2 m^2 - R^2 n^2$$

$$x^2 = \frac{r^2 m^2 - R^2 n^2}{m^2 - n^2}$$

$$x = \sqrt{\frac{(rm + Rn)(rm - Rn)}{(m + n)(m - n)}} = FC.$$

§. 172.

Aufgabe. (Fig. 129.) Das Trapez ABCD soll durch eine gerade Linie parallel zur Grundlinie in zwei gleiche Theile getheilt werden.

Auflösung. Man fälle AH = h senkrecht auf CD, und ziehe EF, welche die Theilungslinie vorstellen soll, parallel zu CD, und setze AB = a, CD = A, EF = y und AG = x.

Auch ziehe man AI $\parallel$ BD, so wird CI = CD - ID = A - a, und EK = EF - KF = y - a. Ferner ist AD = $\frac{1}{2}$ h [A + a] und AF = $\frac{1}{2}$ x [y + a]; mithin der Aufgabe gemäss AF = $\frac{1}{2}$ AD, oder

$$x [y + a] = \frac{1}{2} h [A + a].$$

Da EK $\parallel$ CI ist, so wird auch EK : CI = AG : AH,

$$\text{oder } y - a : A - a = x : h, \text{ woraus } x = h \frac{y - a}{A - a}.$$

Diesen Werth von x in die vorige Gleichung substituirt, gibt:

$$h \frac{(y - a)(y + a)}{A - a} = \frac{1}{2} h [A + a]$$

$$y^2 - a^2 = \frac{1}{2} [A^2 - a^2]$$

$$y^2 = \frac{A^2 - a^2}{2} + a^2 = \frac{A^2 + a^2}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{A^2 + a^2}{2}} = EF.$$

Will man auch x bestimmen, so wird aus

$$x = h \frac{y - a}{A - a}$$

$$= \frac{h}{A - a} \left[\sqrt{\frac{A^2 + a^2}{2}} - a \right] = AG, \text{ und } G$$

ist der Punct, durch welchen $FF \parallel CD$ gezogen werden muss.

§. 173.

Aufgabe. (Fig. 129.) Man soll von einem Trapeze AD durch eine zur Grundlinie parallele Linie EF ein Stück von gegebenem Inhalte abschneiden.

Auflösung. Man fälle AH senkrecht auf CD, ziehe AI $\parallel$ BD, und setze AB = a , CD = A , AH = h , dann EF = y und AG = x , so wie den Inhalt des abzuschneidenden Stückes = m . Man hat also den Punct G zu bestimmen, durch welchen die Theilungslinie zu CD parallel zu ziehen ist.

Es ist nach obiger Construction EK = EF - AB = $y - a$, CI = CD - AB = $A - a$; und da EK $\parallel$ CI, auch

$$EK : CI = AG : AH, \text{ oder}$$

$$y - a : A - a = x : h, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{y - a}{A - a} \cdot h.$$

Ferner soll $AF = (a + y) \frac{x}{2} = m$ sein, woraus ebenfalls $x = \frac{2m}{a + y}$ ist.

Stellt man beide Werthe von x in eine neue Gleichung zusammen, so wird:

$$\frac{y - a}{A - a} \cdot h = \frac{2m}{y + a}$$

$$(y + a)(y - a) \cdot h = 2m(A - a)$$

$$y^2 - a^2 = \frac{2m}{h}(A - a)$$

$$y = \sqrt{\frac{2m}{h}(A - a) + a^2} = EF.$$

$$\begin{aligned} \text{Ferner ist } x &= \frac{(y - a)h}{A - a} = \frac{h}{A - a} [y - a] \\ &= \frac{h}{A - a} \left[\sqrt{\frac{2m}{h}(A - a) + a^2} - a \right] = AG. \end{aligned}$$

§. 174.

Aufgabe. (Fig. 130.) Man soll das Trapez BD durch eine gerade Linie, aus einem gegebenen Punkte T in einer der parallelen Seiten, nach einem gegebenen Verhältnisse theilen.

Auflösung. Gesetzt TE sei die Theilungslinie, so, dass das dadurch abgeschnittene Stück ABET zum ganzen Trapeze sich verhält, wie $n : m$. Nun sei $AD = a$, $BC = b$, $AB = c$, $CD = d$, $AT = f$ und $BE = x$, welches zu suchen ist, indem durch den Punkt E die Richtung der Theilungslinie ET bestimmt ist.

Bedeutet h die Höhe des Trapezes BD, so ist

$$ABCD = [AD + BC] \frac{h}{2} = [a + b] \frac{h}{2}$$

$$ABET = [AT + BE] \frac{h}{2} = [f + x] \frac{h}{2}.$$

Mithin $ABCD : ABET = [a + b] \frac{h}{2} : [f + x] \frac{h}{2}$
 $= a + b : f + x$, und, da auch
 $ABCD : ABET = m : n$ [Aufg.] ist, so

muss auch $a + b : f + x = m : n$, folglich

$$[f + x] m = [a + b] n$$

$$f + x = \frac{n}{m} [a + b] \text{ und}$$

$$x = \frac{n}{m} [a + b] - f = BE \text{ sein.}$$

Diese Länge x oder BE trage man von B gegen C hin, und ziehe ET , so ist die verlangte Theilung geschehen.

Für den Fall, dass $x = 0$ oder $= b$ wird, fällt die Theilungslinie mit BT oder CT zusammen. Würde aber x negativ, oder grösser als b , so bedeutet diess, dass die Theilungslinie auf BA oder CD fällt.

Ist x negativ, so kommt es darauf an, $AF = y$ zu finden. Man ziehe BT und FT , so ist:

$$ABCD : \triangle ABT = [a + b] \frac{h}{2} : f \cdot \frac{h}{2}, \text{ oder}$$

$$ABCD : \triangle ABT = a + b : f, \text{ aber es ist auch}$$

$$\triangle ABT : \triangle AFT = c : y \text{ [§. 76.]}, \text{ mithin}$$

$$\triangle ABT . ABCD : \triangle ABT . \triangle AFT = (a + b) c : fy, \text{ und}$$

$$ABCD : \triangle AFT = (a + b) c : fy, \text{ da aber auch}$$

$$ABCD : \triangle AFT = m : n \text{ [Aufg.]}, \text{ so muss}$$

$$(a + b) c : fy = m : n \text{ und daher}$$

$$fym = (a + b) cn, \text{ also}$$

$$y = \frac{(a + b) cn}{fm} = AF \text{ sein.}$$

Ist x grösser als b , so ist für $DG = z$, wenn man TG zieht,

$ABCD : \triangle CDT = [a + b] \frac{h}{2} : [a - f] \frac{h}{2}$, oder
 $ABCD : \triangle CDT = a + b : a - f$. Auch ist
 $\triangle CDT : \triangle GTD = d : z$ [§. 76.], folglich auch

$ABCD : \triangle GTD = (a + b) d : (a - f) z$, und da
 $ABCD : ABCGT = m : n$, und
 $ABCD : ABCD - ABCGT = m : m - n$, oder
 $ABCD : \triangle GTD = m : m - n$ ist, so muss auch
 $(a + b) d : (a - f) z = m : m - n$ und daher
 $(a - f) z m = (a + b) (m - n) d$, also
 $z = \frac{(m - n) (a + b) d}{(a - f) m} = GD$ sein

§. 175.

Aufgabe. (Fig. 131.) Jedes Viereck durch eine gerade Linie aus einem gegebenen Punkte auf einer seiner Seiten nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Auflösung. 1) Das gegebene Viereck sei $ABCD$ und E der Theilungspunct, aus welchem EF das Viereck so theilt, dass $ABCD : CDEF = m : n$ ist.

Man verlängere BC und AD bis sie sich in G schneiden. Es sei $AG = a$, $BG = b$, $DG = c$ und $CG = d$, welche Linien sich leicht, im Falle das Viereck selbst bestimmt ist, finden lassen. Da ferner der Punct E gegeben ist, so ist auch $EG = f$ gegeben.

Der Punct F , oder $FG = x$, soll gefunden werden.

2) Es ist $\triangle ABG : \triangle CDG = AG \cdot BG : DG \cdot CG$
 [§. 160. Z. II.]
 $= a \cdot b : c \cdot d$, also

$\triangle ABG : \triangle CDG : \triangle CDG = ab - cd : cd$, oder

$ABCD : \triangle CDG = ab - cd : cd$. Ebenso ist

3) $\triangle FEG : \triangle CDG = EG : FG : DG : CG$ [§. 160.

Z. II.] $= f : x : c : d$, also auch

$\triangle FEG : \triangle CDG : \triangle CDG = fx - cd : cd$, oder

$CDEF : \triangle CDG = fx - cd : cd$. Da auch

$ABCD : \triangle CDG = ab - cd : cd$ [2.] ist, so

muss auch $ABCD : CDEF = ab - cd : fx - cd$. Es ist

aber $ABCD : CDEF = m : n$ [Vorausss.]

Mithin $ab - cd : fx - cd = m : n$, woraus

$$fx - cd = \frac{(ab - cd)n}{m} \text{ und}$$

$$x = \frac{(ab - cd)n}{fm} + \frac{cd}{f} = FG.$$

Diese gefundene Linie trage man von G gegen B durch FG auf, und ziehe FE, so ist dadurch das Viereck nach dem verlangten Verhältnisse getheilt.

§. 176.

Aufgabe. (Fig. 132.) Man soll eine gerade Linie AB so in zwei Theile theilen, dass das Rechteck, aus den beiden Theilen construirt, einem gegebenen Quadrate MP gleich wird.

Auflösung. Gesetzt $AB = a$ und $MP = b^2$. Man nehme an, G sei der Theilungspunct. Nimmt man $AG = x$, also $GB = a - x$, so muss der Aufgabe gemäss $AG \cdot GB = b^2$, oder

$x(a - x) = b^2$ sein, woraus $x^2 - ax = -b^2$ und

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2} = \frac{1}{2} [a \pm \sqrt{(a + 2b)(a - 2b)}].$$

Construction. Man beschreibe über AB einen Halbkreis, errichte in B die Linie $HB = b$ senkrecht

auf AB, ziehe endlich durch H die Linie HE $\perp$ AB, wodurch der Halbkreis in F geschnitten wird. Die Senkrechte FG von F auf AB theilt diese in G in die verlangten Theile AG und GB.

Analytischer Beweis. Man ziehe den Radius CF, so ist:

$$\begin{aligned} CG &= \sqrt{CF^2 - FG^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2}, \text{ folglich} \\ AG &= AC + CG = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2}, \text{ und} \\ AD &= AC - DC = AC - CG \\ &= \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - b^2}, \text{ wenn man auch vom} \\ &\text{Durchschnittspunkte E des Bogens und der Parallele} \\ &\text{auf AB die Senkrechte ED fällt.} \end{aligned}$$

Synthetischer Beweis. Es ist $FG = HB = b$ [Constr.] und

$$\begin{aligned} AG : FG : GB &[\S. 88. \text{Zus. II.}], \text{ woraus} \\ AG \cdot GB &= FG^2 = b^2 \text{ ist.} \end{aligned}$$

§. 177.

Aufgabe. (Fig. 133.) Man soll eine gegebene gerade Linie AB um so viel verlängern, dass das Rechteck, aus der ganzen verlängerten Linie und dem verlängerten Stücke derselben construirt, einem gegebenen Quadrate mit der Seite n gleiche.

Auflösung. Es sei $AB = a$, $BD = x$, dann ist $AD = a + x$, folglich der Aufgabe gemäss:

$$AD \cdot BD = n^2 \text{ oder}$$

$$(a + x)x = n^2, \text{ woraus}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + n^2} = BD.$$

Construction. Man halbire AB in C, und errichte in B auf AB die Senkrechte BE = n, ziehe EC und beschreibe mit CE den Kreisbogen ED, der die

Verlängerung von AB in D schneidet. Das Stück BD ist dann die gesuchte Verlängerung.

Beweis. Denn es ist:

$$CD = CE = \sqrt{CB^2 + BE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + n^2} \text{ und}$$

$$BD = CD - CB = \sqrt{\frac{a^2}{4} + n^2} - \frac{1}{2} a = x.$$

§. 178.

Aufgabe. (Fig. 134.) Eine gegebene gerade Linie AB soll so in zwei Theile AC und CB getheilt werden, dass das Rechteck, aus dem einen Theile, AC, und einer anderen gegebenen geraden Linie n construirt, dem Quadrate des Theiles, CB, gleich sei.

Auflösung. Gesetzt $AB = a$, $BC = x$, so ist $AC = AB - CB = a - x$ und vermöge der Bedingung der Aufgabe:

$$AC \cdot n = CB^2, \text{ oder}$$

$$(a - x) n = x^2, \text{ woraus}$$

$$x = -\frac{1}{2} n \pm \sqrt{an + \frac{1}{4} n^2}.$$

Construction. Man verlängere AB, so, dass $BE = n$ wird, beschreibe über AE einen Halbkreis, und halbiere BE in D, errichte in B die senkrechte Linie BF, ziehe die Linie FD, und beschreibe mit FD aus D den Kreisbogen FC; so ist BC das verlangte Stück.

Beweis. Es ist $AB : BF = BF : BE$ [§. 88. Zus. II.], also $BF^2 = AB \cdot BE = an$.

Auch ist $FD^2 = FB^2 + BD^2$, also

$$CD = FD = \sqrt{an + \frac{1}{4} n^2}, \text{ weil}$$

$$BD = \frac{1}{2} BE = \frac{1}{2} n, \text{ und } BD^2 = \frac{1}{4} n^2 \text{ ist.}$$

Es ist demnach

$$BC = CD - BD$$

$$= \sqrt{an + \frac{1}{4} n^2} - \frac{1}{2} n = x.$$

Der zweite Werth von x für das negative Wurzelzeichen kann, da er ganz negativ ausfällt, nicht gebraucht werden, weil dieser Werth von BC darauf deutet, dass der Theilungspunct rechts von B liegen soll, welches aber unmöglich ist, weil auf dieser Seite von B nichts von der Linie AB liegt.

§. 179.

Aufgabe. (Fig. 135.) Man soll zwei Linien finden, deren Quadrate in Summe einem gegebenen Quadrate, und deren Rechteck einem gegebenen Rechtecke gleich ist.

Auflösung. Es sei $AB = a$ die Seite des gegebenen Quadrates und $GD = b$, $DE = c$ die Seiten des gegebenen Rechteckes. Man setze die beiden zu suchenden Linien x und y , so ist nach der Aufgabe:

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ und } xy = bc.$$

Daraus ist $y = \frac{bc}{x}$ und

$$x^2 + \frac{b^2 c^2}{x^2} = a^2$$

$$x^4 + b^2 c^2 = a^2 x^2$$

$$x^4 - a^2 x^2 + \left(\frac{1}{2} a^2\right)^2 = \frac{1}{4} a^4 - b^2 c^2$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2} a^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^4 - b^2 c^2}} = \sqrt{\frac{1}{2} [a^2 \pm \sqrt{(a^2 + 2bc)(a^2 - 2bc)}]}$$

Aus obiger Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ ist $y^2 = a^2 - x^2$ und, wenn man statt x seinen Werth substituirt,

$$y^2 = a^2 - \frac{1}{2} a^2 \mp \sqrt{\frac{1}{4} a^4 - b^2 c^2} = \frac{1}{2} a^2 \mp \sqrt{\frac{1}{4} a^4 - b^2 c^2}, \text{ und}$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{2} a^2 \mp \sqrt{\frac{1}{4} a^4 - b^2 c^2}} = \sqrt{\frac{1}{2} [a^2 \mp \sqrt{(a^2 + 2bc)(a^2 - 2bc)}]}$$

Construction. Man suche zu AB, DG und DE oder zu a, b und c die vierte geometrische Proportionalinie z [§. 82. 2.], beschreibe über AB einen Halbkreis, errichte in B einen Perpendikel $BK = z$, ziehe $KH \perp AB$ und endlich AH und HB, welche die gesuchten Linien sind.

Beweis. Man ziehe HC und den Perpendikel HI auf AB. Da z die vierte geometrische Proportionalinie zwischen a, b und c [Constr.], oder $a : b = c : z$ ist, so muss $z = \frac{bc}{a} = BK = HI$ sein.

Nun ist, im rechtwinkligen Dreiecke CHI,

$$CI^2 = CH^2 - HI^2 \text{ und}$$

$$CI = \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - z^2} = \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - \frac{b^2 c^2}{a^2}}.$$

Mithin $AI = AC + CI$

$$= \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - \frac{b^2 c^2}{a^2}} \text{ und}$$

$$IB = CB - CI = \frac{1}{2} a - \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - \frac{b^2 c^2}{a^2}}.$$

Ferner ist $AI : AH : AB$ [§. 88. Zus. I.], also

$$\begin{aligned} AH^2 &= AI \cdot AB = \frac{1}{2} a^2 + a \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - \frac{b^2 c^2}{a^2}} \\ &= \frac{1}{2} a^2 + \sqrt{\frac{1}{4} a^4 - b^2 c^2}. \end{aligned}$$

Ebenso ist $AB : HB : IB$, also

$$HB^2 = AB \cdot IB = \frac{1}{2} a^2 - a \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - \frac{b^2 c^2}{a^2}}$$

$$\text{oder } HB^2 = \frac{1}{2} a^2 - \sqrt{\frac{1}{4} a^4 - b^2 c^2}$$

Daher $x = AH = \sqrt{\frac{1}{2} a^2 + \sqrt{\frac{1}{4} a^4 - b^2 c^2}}$ und

$y = HB = \sqrt{\frac{1}{2} a^2 - \sqrt{\frac{1}{4} a^4 - b^2 c^2}}.$

Synthetischer Beweis. Es ist $AHB = R$, folglich $AH^2 + HB^2 = AB^2$, welches der erste Theil der Forderung der Aufgabe ist. Ferner ist nach Obigem $a : b = c : z$ oder $AB : DG = DE : KB$, also auch :

$$DG \cdot DE = AB \cdot KB = AB \cdot HI.$$

Aber $\frac{1}{2} AB \cdot HI = \triangle ABH = \frac{1}{2} AH \cdot HB$, mithin
 $AB \cdot HI = AH \cdot HB = DG \cdot DE$, wodurch
 die zweite Bedingung der Aufgabe erfüllt ist.

§. 180.

Aufgabe. (Fig. 136.) Es ist im Endpunkte B eines Durchmessers AB auf diesem eine Senkrechte BC errichtet; man soll in dieser Senkrechten einen Punkt D finden, so dass, wenn man von diesem Punkte D nach dem andern Endpunkte des Durchmessers, A, eine gerade Linie, DA, zieht, der ausserhalb des Kreises liegende Theil derselben, DE, einer gegebenen geraden Linie, mn, gleich sei.

Auflösung. Es sei $AB = a$, $mn = b$, $AD = x$,
 man ziehe BE, so ist $AEB = R = ABD$

$$EAB = DAB,$$

folglich $\triangle ABE \sim \triangle DAB$ und

$$AD : AB = AB : AE, \text{ oder}$$

$$x : a = a : x - b, \text{ woraus}$$

$$x^2 - bx = a^2,$$

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{1}{4} b^2} = \frac{1}{2} [b + \sqrt{4a^2 + b^2}].$$

Construction. Auf der Senkrechten BC nehme man $BH = mn = b$, beschreibe um BH einen Kreis, ziehe durch dessen Mittelpunkt O und durch A die Linie AF, beschreibe mit AF einen Kreisbogen, welcher die Linie BC in D schneidet, so ist D der gesuchte Punkt, durch welchen nach A man die Linie AD ziehen muss, wenn $ED = mn = b$ sein soll.

Beweis. $AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2}$,
daher $AF = AD = AO + OF = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2} + \frac{1}{2}b = x$.

§. 181.

Aufgabe. (Fig. 137.) Es ist ein Quadrant ACB gegeben; man soll in demselben einen Kreis beschreiben, der sowohl den Bogen, als die beiden Halbmesser berühre.

Auflösung. Es sei $AC = BC = a$. Der im Quadranten beschriebene Kreis DFG berühre den Bogen in G, und die beiden Radien in D und F; daher $EG = ED = EF = x$. Da $EDC = R = EFC = DCF$, folglich auch $DEF = R$, und überdiess $ED = EF$ ist, so ist FD ein Quadrat und $ECB = \frac{1}{2}R$. Die Linie CE geht verlängert durch den Berührungspunct G.

Nun ist $EC^2 = EF^2 + FC^2$ und

$$EC = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}.$$

Ferner ist $CG = EC + GE = x\sqrt{2} + x = a$,

folglich $x[\sqrt{2} + 1] = a$ und

$$x = \frac{a}{\sqrt{2} + 1} = a\sqrt{2} - a = a[\sqrt{2} - 1].$$

Construction. Man halbire den rechten Winkel ACB durch GC, an G ziehe man die Tangente GH, welche die Verlängerung von CA in H schneidet, mache $CF = AH$, und errichte in F die senkrechte Linie EF. Aus E, wo letztere die Linie GC schneidet, beschreibe man mit EF einen Kreis, so muss dieser den Bogen AB in G und die beiden Radien BC und AC in D und F berühren.

Beweis. Da $CGH = R$ und $GCH = \frac{1}{2}R$ ist, so muss $CG = GH = a$ und $CH = \sqrt{CG^2 + GH^2}$

$= a \sqrt{2}$, mithin $FC = AH = CH - AC = a \sqrt{2} - a = x$ sein.

Synthetischer Beweis. Man fälle ED senkrecht auf BC , dann ist $EDC = R = EFC$, $DCE = ECF$ und $CE = CE$, folglich $\triangle EDC \cong \triangle EFC$, also auch $ED = EF$, d. h. der mit EF beschriebene Kreis geht durch D , und berührt also AC und BC . Es ist ferner $GC = GH$, weil $HGC = R$ und $GCH = \frac{1}{2} R = GHC$ ist, auch $AH = FC$ [Constr.], folglich $HF = AC = HG$ und, wenn man FG zieht,

$HGF = HFG$. Endlich ist

$HGE = EFH = R$, also auch

$HGE - HGF = EFH - HFG$ oder $0 = y$, also auch $EF = EG$, d. h. der mit EF beschriebene Kreis geht auch durch einen Punkt G des Quadranten.

§. 182.

Aufgabe. (Fig. 188.) Der Durchmesser eines Kreises ist gegeben; man soll die Seite des darum beschriebenen gleichseitigen Dreieckes finden.

Auflösung. Es sei EFG das verlangte Dreieck und $HM = d$, so wie $FG = x$. Es ist $EM = \sqrt{EF^2 - FM^2} = \sqrt{\frac{3}{4} x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$. NO ist senkrecht auf EF [§. 62. Geometrie], also $O = M = R$ und y gemeinschaftlich, folglich $\triangle EFM \sim \triangle EON$ und

$EM : FM = EO : ON$, oder

$\frac{x}{2} \sqrt{3} : \frac{x}{2} = \frac{x}{2} : \frac{1}{2} d$, woraus $x = d \sqrt{3}$.

I. Zusatz. Da $x = d \sqrt{3}$, also auch $x^2 = 3d^2$ ist, so ist auch $3d : x : d$, d. h. die Seite des regulären Dreieckes um den Kreis ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem dreifachen und

einfachen Diameter. Daher ist auch die Construction leicht zu finden.

II. Zusatz. Da $\triangle EFM \sim \triangle EON$ [Aufl.] ist, so muss auch $EF : FM = EN : ON$, und, da $EF = 2FM$ ist, auch $2 : 1 = EN : \frac{1}{2}d$, mithin $EN = d$, folglich $EH = HN = NM = \frac{1}{2}d$ sein.

§. 183.

Aufgabe. (Fig. 138.) Man soll ein rechtwinkliges Dreieck ABC construiren, welches so beschaffen ist, dass die Linien AE und CD von den Spitzen A und C nach der Mitte der ihnen gegenüberstehenden Seiten, den gegebenen Linien m und n gleich werden.

Auflösung. Es sei $BD = x$, also $DC^2 = BD^2 = BC^2 = n^2 - x^2$, mithin $BE^2 = \frac{1}{4}BC^2 = \frac{n^2 - x^2}{4}$.

Ferner $AE^2 = AB^2 + BE^2$, oder

$$m^2 = 4x^2 + \frac{n^2 - x^2}{4} = \frac{15x^2 + n^2}{4}, \text{ woraus}$$

$$x = \sqrt{\frac{4m^2 - n^2}{15}} = BD \text{ und } BC = \sqrt{n^2 - x^2} = \sqrt{\frac{16n^2 - 4m^2}{15}}.$$

Construction. Man ziehe GC beliebig, und errichte darauf AB senkrecht, mache $BF = \frac{1}{2}n$, schneide aus F mit m die Linie GC in I, nehme KB auf AB beliebig, schneide aus K mit $4KB$ die Linie GC in I, ziehe $IH \parallel IK$; aus H mit $\frac{1}{2}n$ durchschneide man BC in E, mache endlich $BC = 2BE$ und $AB = 4BH$, ziehe dann AC, so ist das $\triangle ABC$ das gesuchte.

Analytischer Beweis. Es ist $IF = m$ und $FB =$

$= \frac{1}{2}n$ [Constr.], folglich $BI^2 = m^2 - \frac{1}{4}n^2$. Ferner, da $IH \nparallel IK$, ist:

$IH : BH = IK : BK = 4 : 1$ [Constr.], mithin $IH = 4BH$; dann $BI^2 = IH^2 - EH^2 = 15BH^2 = m^2 - \frac{1}{4}n^2$, also $BH^2 = \frac{m^2 - \frac{1}{4}n^2}{15}$; es ist aber $x = 2BH$,

folglich $\frac{1}{4}x^2 = \frac{m^2 - \frac{1}{4}n^2}{15}$, woraus $x = \sqrt{\frac{4m^2 - n^2}{15}}$,

wie oben ist.

Synthetischer Beweis. Da $BD = 2BH = \frac{1}{2}AB$ und $BC = 2BE$ ist, so muss $DC = 2HE = n$ sein. — Da ferner $IH \nparallel IK$ ist, so muss $IH : BH = IK : BK = 4 : 1$, also $IH = 4BH = AB$ sein; also $AE^2 = AB^2 + BE^2 = IH^2 + BE^2$ (Anstatt IH und BE die Werthe nach §. 88. Zus. III.)

$$\begin{aligned} AE^2 &= IB^2 + BH^2 + HE^2 - BH^2 \\ &= IB^2 + HE^2 = IB^2 \pm \frac{1}{4}n^2 \\ &= IF^2 - FB^2 + \frac{1}{4}n^2 = IF^2 \quad (\text{da } FB = \frac{1}{2}n \\ &\text{ist}); \text{ also } AE = IF = m. \end{aligned}$$

§. 184.

Aufgabe. Die drei Seiten eines Dreieckes sind a, b, c ; man soll 1) den Radius des darum und 2) den Radius des darin beschriebenen Kreises finden.

Auflösung. 1) (Fig. 139.) Es sei $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Man fälle AD senkrecht auf BC , so ist $\triangle ABC = \frac{a \cdot AD}{2}$. Man ziehe durch A den Durchmesser AE und die Linie EC , so ist, da $B = E$ und $ADB = ACE = R$ ist, $\triangle ABD \sim \triangle AEC$, also $AB : AD = AE : AC$, oder $c : AD = 2r : b$, also $AD = \frac{bc}{2r}$.

$$\text{Daher } \triangle ABC = \frac{abc}{4r}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}$$

[§. 147.], woraus

$$r = \frac{abc}{\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}}$$

ist.

Beispiel. Für $a = 9$, $b = 7$, $c = 3$ ist $r = 5,37 \dots$

2) (Fig. 69.) Gesetzt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Man construire nach §. 62. den Kreis im Dreiecke, ziehe AD , BD und CD , und setze $FD = DG = DE = r$. Nun ist:

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \triangle BDC + \triangle ADC + \triangle ADB = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr \\ &= r \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)]} \times \\ &\quad \times (b+c-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Also } r &= \frac{\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}}{2(a+b+c)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{a+b+c}}. \end{aligned}$$

§. 185.

Aufgabe. (Fig. 140.) Es sind die vier Seiten eines Viereckes im Kreise gegeben, man soll die beiden Diagonalen und den Inhalt des Viereckes finden.

Auflösung. I. 1) Es sei $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ und $DA = d$, dann $AC = y$ und $BD = x$. Man mache $AK = DC = c$, und ziehe BK .

Es ist $\angle ABK = \angle DBC$, $\angle BAK = \angle BDC$, also $\triangle ABK \sim \triangle BDC$ und $AB : AK = BD : DC$, folglich $AB \cdot DC = AK \cdot BD$ oder $a \cdot c = x \cdot AN$. Es ist $\angle ABK = \angle DBC$,

also auch $ABK + KBD = DBC + KBD$

oder $ABD = KBC$, ferner $ADB = ACB$, also

$\triangle ABD \sim \triangle NBC$ und

$AD : BD = NC : BC$, also $AD \cdot BC = BD \cdot NC$, oder

$$d \cdot b = x \cdot NC. \text{ Nun ist:}$$

$$a \cdot c = x \cdot AN, \text{ also}$$

$$d \cdot b + a \cdot c = x \cdot [AN + NC] = x \cdot y.$$

2) Da $\triangle ABD \sim \triangle BCN$ [1.] ist, so wird:

$$AB : BD = BN : BC, \text{ also } BN = \frac{AB \cdot BC}{BD}, \text{ ferner,}$$

da $\triangle ANK \sim \triangle BCK \sim \triangle ABD$ ist, auch:

$$AK : KN = BD : AD, \text{ also } KN = \frac{AK \cdot AD}{BD} = \frac{DC \cdot AD}{BD}$$

$$\text{daher } BK = BN + KN = \frac{AB \cdot BC + DC \cdot AD}{BD}.$$

Macht man auch

$BF = DC$, so ist der Analogie nach:

$$AF = \frac{AB \cdot AD + DC \cdot BC}{AC}.$$

3) Nun ist $BK = AF$ [§. 64. Zus. III. G.], also:

$$\frac{AB \cdot BC + DC \cdot AD}{BD} = \frac{AB \cdot AD + DC \cdot BC}{AC} \text{ [2.], und}$$

$$\frac{BD}{AC} = \frac{AB \cdot BC + DC \cdot AD}{AB \cdot AD + DC \cdot BC} \text{ oder } \frac{x}{y} = \frac{ab + cd}{ad + bc},$$

woraus (und aus 1.)

$$x = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}}$$

$$\text{und } y = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}.$$

II. 1) Man fälle $BG = v$ und $DM = w$ auf d und b senkrecht, und setze $CM = z$, so ist, da $BAG = DCM$ ist, $\triangle ABG \sim \triangle DCM$ und $c : z = a : AG$,

also $AG = \frac{a}{c} z$. Ferner ist aus $\triangle DBM$

$$\text{und } \triangle DCM : x^2 = [b + z]^2 + DM^2 = b^2 + 2bz + z^2 + c^2 - z^2 = b^2 + c^2 + 2bz.$$

Ebenso aus $\triangle BGD$ und $\triangle AEG$:

$$r^2 = [d - AG]^2 + GB^2 = d^2 - 2dAG + AG^2 + a^2 - AG^2 = a^2 + d^2 - 2dAG = a^2 + d^2 - \frac{2ad}{c} z,$$

daher:

$$b^2 + c^2 + 2bz = a^2 + d^2 - \frac{2ad}{c} z,$$

$$\text{woraus } z = \frac{c}{2} \cdot \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc}.$$

2) Es ist $w = \sqrt{c^2 - z^2}$, und da $z : w = a : v$

$$\text{ist, auch } v = \frac{a}{c} w = \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - z^2}.$$

$$\text{Ferner } \triangle BCD = \frac{1}{2}bw \text{ und } \triangle ABD = \frac{1}{2}dv = \frac{ad}{2c} w,$$

$$\text{folglich } ABCD = \frac{bw}{2} + \frac{ad}{2c} w = w \frac{bc + ad}{2c} = \frac{ad + bc}{2c} \sqrt{c^2 - z^2}$$

$$\text{Nun ist } c^2 - z^2 = [c + z][c - z] =$$

$$= c^2 \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc} \right] \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{ad + bc} \right]$$

$$= c \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(ad + bc)} \frac{(a + c)^2 - (a - d)^2}{2(ad + bc)}$$

$$= \frac{c^2}{4(ad + bc)^2} (a + b + d - c)(a + d + c - b) \times$$

$$\times (a + b + c - d)(b + c + d - a); \text{ also}$$

$$ABCD = \frac{1}{4} \sqrt{[(a + b + d - c)(a + d + c - b) \times$$

$$\times (a + b + c - d)(b + c + d - a)]}$$

Zusatz. Bei jedem Vierecke im Kreise ist das Product der Diagonalen gleich der Summe der Producte der gegenüberliegenden Seiten des Viereckes. [Aufl. I. 1.]

§. 186.

Aufgabe. (Fig. 140.) Aus den vier Seiten eines Viereckes, worin sich die gegenüberstehenden Winkel zu $2R$ ergänzen, soll der Radius des darum beschriebenen Kreises gefunden werden.

Auflösung. a, b, c und d seien die vier Seiten, r der verlangte Radius und $BD = x$. Es ist nach §. 184.

$$\triangle BCD = \frac{bcx}{4r} \text{ und } \triangle ABD = \frac{adx}{4r}, \text{ also } ABCD = \frac{(ad + bc)x}{4r} = \frac{\sqrt{[(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)]}}{4r} \quad [\S. 185. I. 3.]$$

Setzt man diesen Ausdruck nun gleich dem für $ABCD$ in §. 185. II. 2.; so entsteht daraus:

$$r = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)}}.$$

§. 187.

Aufgabe. Von einem Vierecke, welches sowohl in als um einen Kreis sich befindet, sind drei Seiten a, b und c gegeben; man soll 1) die vierte Seite, 2) den Inhalt M , 3) den Radius R des darum, 4) den r des darin beschriebenen Kreises und 5) die Diagonalen des Viereckes entwickeln.

Auflösung. (Fig. 141.) Es sei $AB = a, BC = b, CD = c, AD = x$, dann $AN = BN = CN = DN = R$ und $EM = FM = GM = HM = r$, so wie $AC = y$ und $BD = x$.

1) Da $EM = FM$ ist, so muss $\triangle BEM \cong \triangle BMF$ u. $BE = BF$ sein, $FM = MG$ „ „ „ $\triangle MFC \cong \triangle MGC$ „ $GC = FC$ „

$MG = MH$ ist, so muss $\triangle MDG \cong \triangle MHD$ u. $GD = HD$ sein
 $KM = ME$ „ „ „ $\triangle MHA \cong \triangle MAE$ „ $AE = HA$ „

folgl. ist $BE + GC + GD + AE = BF + FC + HD + HA$,

oder $a + c = b + x$, woraus $x = a + c - b$ ist

2) Substituirt man diesen Werth von x für d in §. 185. II. 2., so wird:

$ABCD = \sqrt{abc(a + c - b)} = \sqrt{abcx} = M$, u. dann nach §. 186.

3) $R = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(ab + cx)(ac + bx)(ax + bc)}{abcx}}$

4) Da $\triangle ABM + \triangle BMC + \triangle CMD + \triangle DMA = ABCD$ ist, so ist auch $\frac{(a + b + c + x)r}{2} = M = \sqrt{abcx}$,

woraus $r = \frac{2\sqrt{abcx}}{(a + b + c + a + c - b)} = \frac{\sqrt{abcx}}{a + c}$ ist.

5) Die Werthe der Diagonalen x und y sind aus § 185. I. leicht zu finden.

Zusatz. Bei jedem Vierecke, in welchem ein Kreis beschrieben ist, sind die Summen der beiden gegenüberstehenden Seiten gleich. (Aufl. I.)

§. 188.

Aufgaben. (Fig. 142. 1.) Es sind zwei Punkte A und B und eine gerade Linie CD gegeben; man soll in CD einen Punkt H finden, welcher von A und B gleichweit absteht.

Auflösung. Da die beiden Punkte A und B gegeben sind, so sind es auch die Senkrechten $AG = a$, $BF = b$ und $FG = c$. Man setze, H sei der verlangte Punkt, und $FH = x$, so ist $HG = c - x$. Es soll, der Aufgabe gemäss, $BH = AH$ werden.

Da $BH^2 = b^2 + x^2$ und $AH^2 = a^2 + (c - x)^2$ ist, so muss $b^2 + x^2 = a^2 + (c - x)^2 = a^2 + c^2 - 2cx + x^2$,

und $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$ sein.

Construction. Man ziehe AB, und errichte in deren Mitte J die Senkrechte IH, so ist H der verlangte Punct. (Der Beweis beruht auf §. 26. Geom.).

2) Es sind zwei Puncte A und B, dann die gerade Linie CD gegeben; man soll einen Punct H in CD finden, für welchen AH und BH gleiche Neigungswinkel mit CD bilden.

Auflösung. Man falle $AG = a$ und $BF = b$ senkrecht auf CD, und setze $FG = c$, dann $FH = x$; so ist $HG = c - x$, und da $BHF = AHG$ sein soll, so ist $\triangle BFH \sim \triangle AHG$, daher:

$$BF : FH = AG : HG, \text{ oder } b : x = a : c - x,$$

woraus

$$x = \frac{bc}{a + b} \text{ ist.}$$

Construction. Man verlängere die Senkrechte BF, mache $FK = BF$, und ziehe AK, so ist H der Durchschnittspunct, wofür $BHF = FHK = AHG$ ist.

§. 189.

Aufgabe. (Fig. 143.) In einem Dreiecke sind die geraden Linien $AD = a$, $BE = b$ und $CF = c$, von den Ecken nach den Mittelpuncten der gegenüberliegenden Seiten gegeben; man soll die Seiten $AB = x$, $BC = y$, $AC = z$ finden.

Auflösung. Man falle AG senkrecht auf CB, und setze $BG = m$, so ist:

$a^2 = AG^2 + GD^2 = AB^2 - GB^2 + (GB - BD)^2$
 $= AB^2 - GB^2 + GB^2 - 2GB \cdot BD + BD^2 = x^2 + \frac{1}{4}y^2 - ym$
 $z^2 = AG^2 + CG^2 = x^2 - m^2 + (y - m)^2 = x^2 - m^2 + y^2$
 $- 2ym + m^2 = x^2 + y^2 - 2ym$. Multiplicirt man die vor-
 letzte Gleichung mit 2 und substrahirt man davon letz-
 tere, so entsteht:

$$1) 2a^2 - z^2 = x^2 - \frac{1}{2}y^2.$$

Auf ähnliche Art folgt:

$$2) 2b^2 - x^2 = y^2 - \frac{1}{2}z^2, \text{ und}$$

$$3) 2c^2 - y^2 = z^2 - \frac{1}{2}x^2.$$

Aus diesen drei Gleichungen ist dann:

$$x = \frac{2}{3} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}, y = \frac{2}{3} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \text{ und}$$

$$z = \frac{2}{3} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}.$$

§. 190.

Aufgabe. Von einem Dreiecke sind die Summe zweier Seiten $= a$ und die beiden Höhen b und c auf dieselben gegeben; man soll die Seiten selbst finden.

Auflösung. Gesetzt x sei die eine, folglich $a - x$ die andere Seite, Ist nun c die Höhe auf jene und b die Höhe auf diese Seite, so folgt, dass der Inhalt des Dreieckes sowohl durch $\frac{1}{2}cx$, als auch durch $\frac{1}{2}b(a - x)$ ausgedrückt werden kann, daher $cx = b(a - x)$, woraus $x = \frac{ab}{b + c}$ und $a - x = \frac{ac}{b + c}$ ist.

Construction des Dreieckes. (Fig. 144.) Man mache $AB = b$, $BC = c$, $EAC = R$, schneide mit $DC = a$ die Linie AE in D ; mache $DCF = R$, $CF = BC = c$; ziehe $GF \parallel DC$ und $HB \parallel AD$, ziehe endlich HG ; so ist $\triangle DGH$ das verlangte.

Beweis. Man fälle GI senkrecht auf DC , so ist $\triangle DGI \cong \triangle HBC$ (indem $GI = FC = BC = c$, $I = B$ und $GDI = BHC$ ist); folglich muss $GD = HC$, also $GD + DH = HC + DH = DC = a$ sein. Ferner ist die Senkrechte $HK = AB = b$ und $GI = c$.

§.191.

Aufgabe. Von einer Figur, z. B. von einem Rechtecke, ist der Inhalt F gegeben; man soll den dazu gehörigen Masstab finden.

Auflösung. Man nehme eine beliebige Länge, z. B. a Fuss, theile dieselbe in eine beliebige Anzahl n gleicher Theile, nehme jeden dieser Theile als Längeneinheit an, und berechne hiernach den Inhalt der gegebenen Figur; gesetzt man erhalte nicht den gegebenen Inhalt F , sondern M , so fragt sich:

1) welche Länge $= x$ hätte man, statt der von a Fuss, nehmen müssen, damit der n^{te} Theil dieser Länge x die verlangte Einheit geworden wäre, nach welcher die Figur $= F$ ist?

2) in wieviel gleiche Theile y hätte man die willkürliche Länge a theilen müssen, damit jeder Theil die verlangte Einheit geworden wäre, nach der die Figur $= F$ ist?

ad 1) Gesetzt nach dem willkürlichen Massstabe a enthalte die Grundlinie des Rechteckes c , und die Höhe d Theile, so ist $M = cd$. — Es enthalten aber die c Theile $\frac{c}{n} a$ Fuss, die d Theile $\frac{d}{n} a$ Fuss, und der absolute Inhalt des Rechteckes ist $\frac{cd}{n^2} a^2 = \frac{M}{n^2} a^2 \square'$.
Gesetzt ferner, nach dem zu bestimmenden Massstabe

von x Fuss Länge, in n gleiche Theile getheilt, enthalte die Grundlinie des Rechteckes r , die Höhe k solche Theile, also ist $rk = F$.

Es enthalten aber die r Theile $\frac{r}{n} x$ Fuss, und die k Theile $\frac{k}{n} x$ Fuss, also das Rechteck $\frac{rk}{n^2} x^2 = \frac{F}{n^2} x^2 \square'$.

Daher die Gleichung:

$$\frac{M}{n^2} a^2 = \frac{F}{n^2} x^2, \text{ oder } F : M = a^2 : x^2, \text{ woraus}$$

$$x = a \sqrt{\frac{M}{F}}.$$

ad 2) Es ergibt sich hier der absolute Flächenraum in Quadratfuss, ein Mal $= \frac{M}{n^2} a^2$ das andere Mal

$$= \frac{F}{y^2} a^2, \text{ woraus}$$

$$M : F = n^2 : y^2 \text{ und } y = n \sqrt{\frac{F}{M}}.$$

Jede der gefundenen beiden Formeln löset die Aufgabe, doch ist die erstere bequemer. Da sich jede geradlinige Figur in ein Rechteck verwandeln lässt, so ist die Form der gegebenen Figur ganz gleichgültig.

Beispiel. Der Massstab einer nach demselben berechneten Figur von $2000 \square^\circ$ ist verwischt oder verloren gegangen; man soll denselben durch Rechnung bestimmen.

Auflösung. Man theile eine beliebige Länge, z. B. einen Bayerischen Fuss, in beliebig viele gleiche Theile, z. B. in 300, lasse jeden Theil eine Ruthe gelten, und berechne darnach die gegebene Figur. Ge-
setzt man erhalte nicht 2000, sondern 1200 $\square^\circ$. Es

ist hier $a = 1$ Bayer. Fuss, $F = 2000 \square^\circ$, $M = 1200 \square^\circ$ und $n = 300$, folglich aus 1):

$$x = 1 \sqrt{\frac{1200}{2000}} = 0,774, \text{ d. h. man muss nicht}$$

einen Bayer. Fuss, sondern nur davon $7'' 7''' 4''''$ in 300 gleiche Theile theilen, und jeden eine Ruthe gelten lassen, um den verlangten Massstab zu erhalten.

Für die Formel von 2) entsteht:

$$y = 300 \sqrt{\frac{2000}{1200}} = 387,298, \text{ d. h. man muss einen}$$

Bayer. Fuss nicht in 300, sondern in 387,298 gleiche Theile theilen, und jeden Theil eine Ruthe für den verlangten Massstab gelten lassen.

§. 192.

Aufgabe. Das $\triangle ABC$ (Fig. 145.) in ein Trapez zu verwandeln, in welchem $BC = a$ die eine Parallele, dann ABC und BCD die beiden anliegenden Winkel sind.

Auflösung. Man ziehe $AD \parallel BC$, setze $AD = b$, die Höhe $AG = h$, ferner ziehe man $EF \parallel BC$, betrachte BF als das verlangte Trapez, und setze $EF = y$ und $HG = x$, so entsteht die Gleichung $\frac{y + a}{2} x = \frac{ah}{2}$.

Man ziehe $IC \parallel AB$, dann ist $b - a : y - a = h : x$ [§. 91.], also $(b - a) x = (y - a) h$, und es ist $y = \sqrt{ab}$.

Construction. Man beschreibe über AD einen Halbkreis, ziehe $BK \parallel CD$, so ist $DK = BC = a$, errichte in K auf AD die Senkrechte KL , und ziehe LD , so ist $LD = \sqrt{ab} = y$. Macht man nun $MD =$

$\equiv LD$ und zieht man $ME \parallel CD$ und dann $EF \parallel BC$; so ist $EF = MD = LD = y$, folglich BF das verlangte Trapez.

Beweis. Man verlängere AB und CD bis sie sich in N schneiden, dann ist $\triangle EFN \sim \triangle BCN$, also:
 $\triangle EFN : \triangle BCN = EF^2 : BC^2 = LD^2 : KD^2 = AD : KD$
 $: KD^2 = AD : KD$,
 folglich $\triangle EFN - \triangle BCN : \triangle BCN = AD - KD : KD$
 $= AK : BC$, oder

$BF : \triangle BCN = AK : BC$. Nun ist auch:
 $\triangle ABC : \triangle BCN = AB : BN$ und, weil $\triangle ABK \sim \triangle BCN$,
 auch $AB : BN = AK : BC$, also $\triangle ABC : \triangle BCN = AK : BC$.

Da nun schon $BF : \triangle BCN = AK : BC$ ist,

so muss $\triangle ABC = BF$ sein.

§. 193.

Aufgabe. Jede Figur in ein gleichseitiges Dreieck zu verwandeln.

Auflösung. Man verwandle die gegebene Figur in ein Dreieck, dessen Grundlinie $= b$ und Höhe $= h$ sei. Die Seite des verlangten Dreieckes sei x , seine Höhe y . Dann ist $bh = xy$ und $x^2 = (\frac{x}{2})^2 + y^2$, also hieraus $y = \sqrt{h \cdot \frac{1}{2} b \sqrt{3}}$.

Betrachtet man diese Formel, so ergibt sich, dass $\frac{1}{2} b \sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{4} b^2} = \sqrt{b^2 - (\frac{b}{2})^2}$ d. i. die Höhe eines mit der Seite b gezeichneten gleichseitigen Dreieckes ist. Wird diese c genannt, so ist $y = \sqrt{h \cdot c}$, d. h., wenn irgend ein Dreieck in ein gleichseitiges verwandelt werden soll, so ist dessen Höhe y die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der Höhe h

des gegebenen Dreieckes und der Höhe $c = \frac{1}{2} b \sqrt{3}$ des mit der Grundlinie desselben gezeichneten gleichseitigen Dreieckes.

Construction. (Fig. 146.) Es sei ABC das gegebene Dreieck, von welchem $BC = b$ als Grundlinie, also $AF = h$ als Höhe genommen wird. Man zeichne mit CB das gleichseitige $\triangle EBC$ und dessen Höhe ED , mache $EG \parallel DF$, also $GF = DE$ und bilde FH als mittlere geometrische Proportionallinie zwischen $AF = h$ und $GF = ED = c = \frac{1}{2} b \sqrt{3}$ [§. 88. Zus. I.]; dann ist $FH = y =$ der Höhe des zu suchenden Dreieckes. Macht man nun $LD = FH$, und zieht man $LM \parallel EB$ und $LN \parallel EC$, so ist LMN das gesuchte Dreieck.

Beweis.

$$\begin{aligned} \triangle ECB : \triangle LMN &= ED^2 : LD^2 = GF^2 : HF^2 = GF^2 : AF \cdot GF \\ &= GF : AF = ED : AF, \text{ da} \\ \text{aber auch } \triangle ECB : \triangle ABC &= ED : AF \text{ [§. 77. G.] ist,} \end{aligned}$$

so muss $\triangle LMN = \triangle ABC$ sein.

§. 194.

Aufgabe. (Fig. 147.) Durch einen gegebenen Punkt D innerhalb eines Winkels ABC eine gerade Linie EF so zu ziehen, dass dadurch ein Dreieck BEF abgeschnitten werde, welches so gross ist als ein Parallelogramm BH .

Auflösung. Es sei $DH = a$, $GD = b$, $KF = x$ und die Senkrechte $GM = h$, so ist, wenn $DL \parallel AB$ ist, $\triangle DLF \sim \triangle BEF$, also:

$$\triangle DLF : \triangle BEF = LF^2 : BF^2 \text{ oder } (a+x)^{\frac{h}{2}} : \triangle BEF \\ = (a+x)^2 : (a+b+x)^2; \text{ also } \triangle BEF = \frac{h(a+b+x)^2}{2(a+x)}.$$

$$\text{Nun ist } BH = h(a+b), \text{ also } \frac{h(a+b+x)^2}{2(a+x)} = \\ = h(a+b), \text{ woraus } x = \sqrt{a^2 - b^2} \text{ ist.}$$

Construction. Man errichte in K eine Senkrechte $KO = GD = b$, und durchschneide aus O mit $DH = a$ die Linie BC in F, welcher Punkt mit D die Richtung von EF bestimmt.

Beweis. Es ist $KF = \sqrt{OF^2 - KO^2} = \sqrt{a^2 - b^2} = x$. Auch ist:

$$\triangle KNF : \triangle EGD = KF^2 : GD^2 = a^2 - b^2 : b^2, \text{ folglich} \\ \triangle KNF + \triangle EGD : \triangle EGD = a^2 : b^2, \text{ nun ist auch} \\ \triangle DNH : \triangle EGD = a^2 : b^2, \text{ folglich:}$$

$$\triangle KNF + \triangle EGD = \triangle DNH, \text{ also auch } \triangle BEF = BH.$$

Zusatz. Der Ausdruck $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist nur möglich, wenn $a > b$ ist.

§. 195.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck in ein Rechteck zu verwandeln, dessen Umfang einer gegebenen Linie ($= 4a$) gleich wird.

Auflösung. Eine Seite des Dreieckes sei b , seine Höhe $2h$, die zu bestimmenden Seiten des Rechteckes x und y , so ist $x + y = 2a$ und $xy = bh$,

$$\text{woraus } \left. \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} = a \pm \sqrt{a^2 - bh} \text{ ist, d. h. Man nehme}$$

den vierten Theil der gegebenen Linie und die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Hypotenuse dieser vierte Theil und dessen andere Kathete die mitt-

lere geometrische Proportionale ist zwischen der Grundlinie und halben Höhe des Dreieckes; so ist die Summe dieser beiden Linien die grössere, die Differenz aber die kleinere Seite des gesuchten Rechteckes.

Construction. (Fig. 148.) Es sei ABC das gegebene Dreieck und AD dessen Höhe. Man mache $BE = \frac{1}{2} AD$, beschreibe über EC einen Halbkreis, errichte BF ($= \sqrt{bh}$) senkrecht auf EC, nehme $FG = a$ dem vierten Theile des gegebenen Umfangs (dadurch wird $BG = \sqrt{a^2 - bh}$), und beschreibe damit aus G den Halbkreis HK, dann ist BK ($= GK + BG = a + \sqrt{a^2 - bh}$) die eine, und BH ($= HG - BG = a - \sqrt{a^2 - bh}$) die andere verlangte Seite. Nimmt man BN ($= BH$) senkrecht auf BK, und zieht man $MN \parallel BK$, und $KM \parallel BN$, so ist BM das verlangte Rechteck.

§. 196.

Aufgabe. (Fig. 149.) Es ist ein Winkel ABC und innerhalb desselben ein Punct D gegeben; man soll einen Kreis construiren, der durch D geht, und beide Schenkel des Winkels tangirt.

1) **Auflösung.** Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises muss nothwendig in der Halbierungslinie BN des Winkels liegen, indem beide Schenkel desselben Tangenten werden sollen. Gesetzt E sei der gesuchte Mittelpunkt. Man fälle DG [$= h$] senkrecht auf BN, ebenso EF auf AB, setze $BH = a$, $GB = b$, $BF = x$, $BE = y$, so ist $EF^2 = y^2 - x^2$ und $ED^2 = (b - y)^2 + h^2$, also gemäss der Aufgabe $y^2 - x^2 = (b - y)^2 + h^2$. Weil nun $BE : EF = BH : BG$ ist, so ist auch

by = ax und aus diesen beiden Gleichungen $x = a \pm \pm \sqrt{a^2 - b^2 - h^2}$; daher folgende

Construction. Es ist $HG^2 = a^2 - b^2$; beschreibt man über HG den Halbkreis, und nimmt man $GP = GD$, so ist $HP^2 = a^2 - b^2 - h^2$. Beschreibt man nun aus H mit HP einen Halbkreis, so ist F der Berührungspunkt für den einen und Q der für den andern ebenfalls der Bedingung der Aufgabe entsprechenden Kreis.

Beweis. Errichtet man auf AB in F die Senkrechte FE, so muss man zeigen, dass $FE = ED$ ist. Man ziehe HE, so muss man zeigen, dass $FE = ED$ ist. Man ziehe HE, so ist:

$$\begin{aligned} HE^2 &= HF^2 + FE^2 = HP^2 + EF^2 \text{ und auch} \\ HE^2 &= HG^2 + EG^2 = HP^2 + GP^2 + EG^2 = HP^2 + DG^2 + EG^2 \\ &= HP^2 + ED^2 \end{aligned}$$

folglich $HP^2 + FE^2 = HP^2 + ED^2$, also $FE = ED$.

Anmerkung. Das Geschäft wird einfacher, wenn man $HG = d$ und $GB = b$ als gegeben betrachtet, und $HF = z$ setzt; dann ist $z^2 + EF^2 = d^2 + EG^2$, oder $z^2 + EF^2 = d^2 + ED^2 - h^2$. Es soll aber $EF = ED$ sein, folglich ist $z^2 = d^2 - h^2$, wornach die Construction leichter zu übersehen ist.

2) **Auflösung.** (Fig. 149. a.) Man ziehe BD, errichte in einem beliebigen Punkte I der Linie AB eine senkrechte IK bis zur Halbierungslinie BN des Winkels ABC, beschreibe aus K mit IK den Bogen IL, der BD in L schneidet, ziehe LK und DE $\perp$ LK, so ist E der

Mittelpunct des verlangten Kreises. (Der Beweis ist leicht zu finden.)

§. 197.

Aufgabe. (Fig. 150.) Es ist eine gerade Linie AB und in ihr ein Punct C gegeben; man soll einen Kreis construiren, der AB in C und zugleich einen gegebenen um D mit DE beschriebenen Kreis berührt.

Auflösung. Man errichte CO auf AB senkrecht, so muss der Mittelpunct des Berührungskreises in CO liegen. Er sei F. Man setze $CF = x$, dann muss, wenn man DF zieht, auch $GF = x$ sein. Man fälle $DH = a$ senkrecht auf AB, setze $DE = DG = r$, und $HC = b$, so entsteht, wenn man FP senkrecht auf HD fällt, $FD^2 = PF^2 + PD^2$, oder $(x + r)^2 = b^2 + (a - x)^2$ und daraus $2(a + r)x = b^2 + a^2 - r^2$, oder $2HK \cdot x = CD^2 - r^2 = CL \cdot CN$, oder auch, wenn man CN in M halbirt, $2 \cdot HK \cdot x = 2CL \cdot CM$, und $HK \cdot x = CL \cdot CM$, wornach x leicht zu construiren ist.

§. 198.

Aufgabe. Ein Dreieck durch drei gerade Linien in vier congruente Dreiecke zu theilen.

Auflösung. Man halbire die drei Seiten, und verbinde die Halbirungspuncte durch drei gerade Linien. (Der Beweis ist leicht zu finden.)

§. 199.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck in ein ande-

res zu verwandeln, welches zwei bestimmte Winkel α und β hat.

Auflösung. (Fig. 151.) Es sei ABC das gegebene Dreieck; man trage in B und C an BC die gegebenen Winkel β und α an, und ziehe AD $\parallel$ BC, DE $\parallel$ BI, dann mache man $GC = FC = \sqrt{CE \cdot BC}$ [§. 88. Zus. I.], und ziehe GH $\parallel$ DE, dann ist das $\triangle$ GHC das verlangte.

Beweis. Da GH $\parallel$ ED $\parallel$ IB ist, so ist HGC $= \beta$. Es ist $\triangle$ GHC : $\triangle$ DEC $= GC^2 : CE^2 = CE \cdot BC : CE^2 = BC : CE$, aber auch $\triangle$ ABC : $\triangle$ DEC $= BC : CE$, also $\triangle$ GHC $= \triangle$ ABC.

§. 200.

Aufgabe. Ein Dreieck aus einem zu bestimmenden Puncte innerhalb in drei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. (Fig. 152.) M sei der Punct, MN ($\parallel$ AB), MO ($\parallel$ AC) und AM die Theilungslinien. Denkt man sich PQ durch M $\parallel$ BC, fällt man dann auf BC von A die Senkrechte AR $= h$ und von M die MS $= x$; so ist:

$$\triangle MNO : \triangle ABC = 1 : 3 = x^2 : h^2,$$

$$\text{also } x = h \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} h \sqrt{3}.$$

Hiernach lässt sich die Lage von PQ construiren, in deren Mitte der Punct M liegen muss, damit AMNB $=$ AMOC werde etc.

§. 201.

Aufgabe. Die beiden nicht parallelen Seiten ei-

nes Trapezes, seine Höhe h und Fläche m sind bekannt; man soll die parallelen Seiten finden.

Auflösung. (Fig. 129.) Es sei $BD = b$, $AC = c$, $AH = h$, $AB = y$, $CD = x$ und $AI \parallel BD$; dann ist $\frac{1}{2}(x + y)h = m$,

also $\frac{1}{2}(x + y) = \frac{m}{h}$.

Ferner ist $CH = \sqrt{c^2 - h^2}$, $HI = \sqrt{b^2 - h^2}$,

also $CI = x - y = \sqrt{c^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2}$

und $\frac{1}{2}(x - y) = \frac{1}{2}[\sqrt{c^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2}]$.

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\left. \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right\} = \frac{m}{h} + \frac{1}{2}[\sqrt{c^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2}].$$

§. 202.

Aufgabe. Innerhalb eines Dreieckes einen Punkt so zu bestimmen, dass, wenn man von demselben nach den drei Ecken gerade Linien zieht, die entstehenden Dreiecke sich wie $m : n : p$ verhalten.

Auflösung. (Fig. 152.) Man theile eine der drei Seiten des $\triangle ABC$, z. B. BC in drei Theile nach dem Verhältnisse $m : n : p$ [§. 82. 1.]; so, dass $BN : NO : OC = m : n : p$ wird, dann ziehe man $MN \parallel AB$ und $MO \parallel AC$, so ist M der verlangte Punkt. (Der Beweis ergibt sich leicht, wenn man AN und AO zieht.)

§. 203.

Aufgabe. (Fig. 153.) Im $\triangle ABC$ sind die drei geraden Linien a, b, c von den Ecken nach den Mittelpunkten der gegenüberstehenden Seiten gegeben; man

soll durch sie die drei Seiten x, y, z , sowie den Inhalt Q des Dreieckes finden.

Auflösung. 1) Es ist $AE^2 = z^2 - BE^2 = a^2 - ED^2 = a^2 - [BD - BE]^2$, also $z^2 - BE^2 = a^2 - BD^2 + 2BD \cdot BE - BE^2$, oder $z^2 = a^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{x^2 + z^2 - y^2}{2}$

woraus $4a^2 + x^2 = 2y^2 + 2z^2$
und der Analogie nach auch $4b^2 + y^2 = 2x^2 + 2z^2$
eben so $4c^2 + z^2 = 2x^2 + 2y^2$

also die Summe $\frac{4}{3} [a^2 + b^2 + c^2] = x^2 + y^2 + z^2$
und durch Subtraction $x^2 = \frac{4}{9} [2b^2 + 2c^2 - a^2]$, $y^2 = \frac{4}{9} [2a^2 + 2c^2 - b^2]$ und $z^2 = \frac{4}{9} [2a^2 + 2b^2 - c^2]$,
(also die drei Seiten.)

2) Es ist $Q = \frac{1}{2}x \cdot AE = \frac{1}{2}x \sqrt{y^2 - \left[\frac{x^2 + y^2 - z^2}{2x} \right]^2}$
 $= \frac{1}{4} \sqrt{[4x^2 y^2 - [x^2 + y^2 - z^2]^2]}$
und daraus auch $4x^2 y^2 = 16Q^2 + [x^2 + y^2 - z^2]^2$
oder nach 1) $\frac{64}{81} [2b^2 + 2c^2 - a^2] [2a^2 + 2c^2 - b^2] = 16Q^2 + \frac{16}{81} [5c^2 - b^2 - a^2]^2$ (1), woraus $Q^2 = \frac{1}{9} [2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4] = \frac{1}{9} [4a^2b^2 - [a^2 + b^2 - c^2]^2]$ ist; also der Inhalt $P = \frac{1}{3} \sqrt{[a+b+c] [a+b-c] [a+c-b] [b+c-a]}$

§. 104.

Aufgabe. (Fig. 154.) Die drei Seiten $AB = c$, $BC = a$ und $AC = b$ eines Dreieckes sind gegeben; man soll die Entfernung der Mittelpunkte des um und in dasselbe beschriebenen Kreises finden.

Auflösung. Man setze $a + b + c = S$, $b + c - a = A$, $a + c - b = B$ und $a + b - c = C$.

E sei der Mittelpunkt des Kreises um das Dreieck, also $EC = r = \frac{a \cdot b \cdot c}{V[S.A.B.C.]}$ [§. 184. 1.], und D der des Kreises im Dreiecke, also $DF = DH = \rho = V \frac{A.B.C.}{4S}$ [§. 184. 2.].

Es ist $AO = AH$, $HC = FC$, $OB = BF$, also $b = CH + AH = FC + AO = a - BF + c - BF$, mithin $BF = \frac{a + c - b}{2} = \frac{B}{2}$.

Es ist ferner, wenn EG senkrecht auf a ist $GF = BF - BG = \frac{1}{2} [a + c - b] - \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} [c - b]$. Ist x der Abstand der Mittelpunkte D und E, so ist:
 $x^2 = [DF - EG]^2 + GF^2 = \rho^2 - 2\rho \cdot EG + EG^2 + GF^2$
 $= \rho^2 - 2\rho \cdot V \left[\frac{4r^2 - a^2}{4} \right] + r^2 - \frac{1}{4}a^2 + \left(\frac{c-b}{2} \right)^2$

Es ist aber:

$$-\frac{1}{4}a^2 + \frac{(c-b)^2}{4} = -\frac{B.C}{4},$$

$$\text{folglich } x^2 = r^2 + \rho^2 - \frac{B.C}{4} - \rho V 4r^2 - a^2,$$

$$\text{ferner: } \rho^2 - \frac{B.C}{4} = -\frac{B.C.a}{2S} \text{ a. } \rho \cdot V 4r^2 - a^2 = \\ = \frac{a}{2S} V 4b^2c^2 - S.A.B.C.$$

Nach §. 203. 2. ist $4b^2c^2 - [b^2 + c^2 - a^2]^2 = 16Q^2 = S.A.B.C.$ [§. 147.], also $\rho V 4r^2 - a^2 = \frac{a}{2S} \times [b^2 + c^2 - a^2]$; folglich:

$$x^2 = r^2 - \frac{B.C.a}{2S} - \frac{a}{2S} [b^2 + c^2 - a^2]$$

$$= r^2 - \frac{a}{2S} [B.C + b^2 + c^2 - a^2]$$

$$= r^2 - \frac{a}{2S} \cdot 2bc = r^2 - \frac{abc}{S}; \text{ es ist aber } r \cdot \varrho = \frac{abc}{2S}$$

folglich $x^2 = r^2 - 2r\varrho$ und $x = \sqrt{r[r - 2\varrho]}$.

§. 205.

Aufgabe. (Fig. 154.) Verlängert man zwei Seiten AB und BC eines Dreieckes über die dritte hinaus, so gibt es einen Kreis, dessen Mittelpunkt ausserhalb des Dreieckes liegt, und welcher die dritte Seite und die verlängerten beiden andern tangirt: man soll dessen Halbmesser ϱ' finden.

Auflösung. Gesetzt K sei der Mittelpunkt des verlangten Kreises, für welchen die Senkrechten $LK = KN = KM = \varrho'$ sind. Es ist $\triangle ALK \cong \triangle AKN$, $\triangle CKM \cong \triangle CKN$ und $\triangle LBK \cong \triangle BKM$, also $LA = AN$, $CM = CN$ und $BL = BM$, oder $c + AN = a + CN$ und $c + 2AN = a + AN + CN = a + b$, daher $AN = \frac{1}{2}[a + b - c] = \frac{1}{2}C$. — Ebenso ist $a = BF + FC = BO + HC = c - AH + b - AH$, woraus $AH = \frac{1}{2}[b + c - a] = \frac{1}{2}A$ ist. Nun ist $o = n$, $H = N = R$, also $\triangle ADH \cong \triangle AKN$, und $AH : DH = KN : AN$, oder $\frac{1}{2}A : \varrho = \varrho' : \frac{1}{2}C$, also $\varrho' = \frac{A \cdot C}{4\varrho} = \sqrt{\frac{A \cdot C \cdot S}{4B}}$

[§. 204]. Eben so hat man den Radius ϱ'' für den Kreis auf der Seite bei a , $\varrho'' = \sqrt{\frac{B \cdot C \cdot S}{4A}}$ und den bei

$$c, \varrho''' = \sqrt{\frac{A \cdot B \cdot S}{4C}}.$$

Zusatz. Das Product der vier Radien $\varrho, \varrho' \varrho'', \varrho'''$ ist $= \frac{1}{16} [A \cdot B \cdot C \cdot S]$, folglich $\sqrt{\varrho \cdot \varrho' \cdot \varrho'' \cdot \varrho'''} = \frac{1}{4} \sqrt{A \cdot B \cdot C \cdot S} = \triangle ABC$ [§. 147.]

§. 206.

Aufgaben. 1) Man soll in Fig. 154. die Central-
linie $EK = x'$ finden [§. 205.]

Auflösung. Man fälle EI senkrecht auf AC . Es
ist $AN = \frac{1}{2} [a + b - c] = \frac{C}{2}$ [§. 205.], dann $IN = AN$
 $- AI = AN - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2} [a - c]$. Es ist, wenn man
 EI über I verlängert, bis sie die durch $K \perp AC$ gezo-
gene Linie schneidet, und EK zieht, $EK^2 = [EI + KN]^2 +$
 $+ IN^2 = [\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}b^2} + e']^2 + \frac{(a - c)^2}{4}$, oder:

$$x'^2 = r^2 - \frac{1}{4}b^2 + e' \sqrt{4r^2 - b^2} + e'^2 + \frac{(a - c)^2}{4}.$$

$$\text{Es ist aber } -\frac{1}{4}b^2 + \frac{(a - c)^2}{4} = -\frac{1}{4}AC$$

$$\text{und } e' \sqrt{4r^2 - b^2} = \frac{b}{2B} \sqrt{4a^2c^2 - A \cdot B \cdot C \cdot S};$$

$$\text{ferner } 4a^2c^2 - [a^2 + c^2 - b^2]^2 = 16Q^2 = A \cdot B \cdot C \cdot S$$

$$[\text{§. 203. analog.}], \text{ also } e' \sqrt{4r^2 - b^2} = \frac{b}{2B} [a^2 + c^2 - b^2],$$

$$x'^2 = r^2 + e'^2 - \frac{1}{4}A \cdot C + \frac{b}{2B} [a^2 + c^2 - b^2]$$

$$= r^2 + \frac{A \cdot C \cdot S}{4B} - \frac{A \cdot C}{4} + \frac{b}{2B} [a^2 + c^2 - b^2]$$

$$= r^2 + \frac{b \cdot A \cdot C}{2B} + \frac{b}{2B} [a^2 + c^2 - b^2] =$$

$$= r^2 + \frac{b}{2B} [A \cdot C + a^2 + c^2 - b^2]$$

$$= r^2 + \frac{b}{2B} \cdot 2ac = r^2 + \frac{abc}{B},$$

und da $r\varrho' = \frac{abc}{2B}$ ist,

$$x'^2 = r^2 + 2r\varrho', \text{ also } x' = \sqrt{r[r + 2\varrho']}.$$

Ebenso erhält man die Centrale zu r und ϱ'' , oder

$$x'' = \sqrt{r[r + 2\varrho'']} \text{ und die für } r \text{ und } \varrho''' \text{ oder } x''' = \sqrt{r[r + 2\varrho''']}.$$

2) Man soll in Fig. 154. die Centrale $DK = y'$ finden. [§. 205.]

Auflösung. Es ist $HN = AN - AH = \frac{1}{2}[a + b - c] - \frac{1}{2}[b + c - a] = a - c$, dann $y'^2 = HN^2 + [DH + NK]^2 = HN^2 + [\varrho + \varrho']^2 =$

$$= [a - c]^2 + \frac{A \cdot B \cdot C}{4S} + \frac{A \cdot C \cdot S}{4B} + 2\varrho \cdot \varrho' [\text{§. 204. u. 205.}]$$

$$= [a - c]^2 + \frac{A \cdot C}{4BS} [B + S]^2 =$$

$$= \frac{b^2(a - c)^2 + b^2(a + c)^2}{BS}$$

$$= \frac{4ab^2c}{BS}, \text{ folglich } y' = 2b \sqrt{\frac{ac}{BS}}.$$

Ebenso erhält man die Centrale zwischen den Kreisen mit ϱ und ϱ'' oder $y'' = 2a \sqrt{\frac{bc}{AS}}$ und die zwischen

den Kreisen mit ϱ und ϱ''' oder $y''' = 2c \sqrt{\frac{ab}{CS}}.$

§. 207.

Aufgabe. Die Seite des regulären Dreissigeckes im Kreise, dessen Radius $= 1$ ist, zu finden.

Auflösung. (Fig. 155.) Es sei $AB = x$ die Seite eines regulären Dreissigeckes, folglich ist $ADB = 120^\circ$. Man mache $BC = DC = 1$, so wird $BDC = 60^\circ$, also

$ADC = 72^\circ$, und es ist die Sehne AC die Seite eines regulären Fünfeckes in diesem Kreise, mithin:

$$AC = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = a \text{ [§. 154.]}$$

Es ist $AD = \frac{BC \cdot AC \cdot AB}{4 \triangle ABC}$ [§. 154. 1.], also $\triangle ABC = \frac{1}{4} ax$.

Auch ist:

$$\triangle ABC = \frac{1}{4} \sqrt{[a + 1 + x][a + 1 - x][a + x - 1] \times [1 + x - a]} \text{ [§. 147.]}$$

also $a^2 x^2 = [[a + 1]^2 - x^2][x^2 - [a - 1]^2]$ und

$$x^4 - [a^2 + 2] x^2 + [a^2 - 1]^2 = 0, \text{ woraus}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2} [a^2 + 2]} - \sqrt{\frac{1}{4} [a^2 + 2]^2 - [a^2 - 1]^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 4 - 2a\sqrt{12 - 3a^2}} =$$

$$x = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{2a^2 + 4 + 4[a^2 - 1]}{2}} - \sqrt{\frac{2a^2 + 4 - 4[a^2 - 1]}{2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} [a \sqrt{3} - \sqrt{4 - a^2}] \text{ und, da } a = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \text{ ist,}$$

$$x = \sqrt{\frac{15 - 3\sqrt{5}}{8}} - \frac{1}{4} \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{15 - 3\sqrt{5}}{8}} - \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Zusatz. Nach §. 94. Zus. II. G. findet man durch gehörige Substitution dieses Werthes von x nach gehöriger Abkürzung die Seite des im Kreise beschriebenen regulären Fünfzehneckes, oder

$$y = \frac{1}{2} [(a^2 - 2) \sqrt{3} + a \sqrt{4 - a^2}] = \frac{1}{4} [\sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15}],$$

ferner nach §. 94. G. die Seite des regulären Sechzig-eckes, oder

$$\begin{aligned}
z &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - x^2}} \\
&= \sqrt{2 - \sqrt{\frac{6 - a^2 + \sqrt{12a^2 - 3a^4}}{2}}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2} [4 - a] - \sqrt{\frac{12 - 3a^2}{4}}} \\
&= \frac{1}{2} [\sqrt{2 + a} - \sqrt{3} \sqrt{2 - a}] \\
&= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{4}} + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{4}} - \sqrt{3} \left[\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{4}} - \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{4}} \right] \right] \\
&= \frac{1}{4} [(1 + \sqrt{3}) \sqrt{3 - \sqrt{5}} - (\sqrt{3} - 1) \sqrt{5 + \sqrt{5}}], \quad \text{oder auch} \\
&= \frac{1}{4} [(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}) (\sqrt{5} - 1) - (\sqrt{3} - 1) \sqrt{5 + \sqrt{5}}].
\end{aligned}$$

Constructions-Aufgaben.

§. 208.

Aufgabe. Es ist ein Dreieck gegeben; man soll ein anderes gegebenes Dreieck so verwandeln, dass es mit dem ersteren ähnlich wird.

Auflösung. (Fig. 156.) Man verwandle das letztere Dreieck in das $\triangle ABC$ so, dass es mit dem ersteren $\triangle AFG$ einen Winkel gemein hat [§. 52. 2. G.]; ziehe $BD \parallel FG$, beschreibe über AC einen Halbkreis, errichte DK senkrecht auf AC , und mache $AP = AK$, so ist, wenn man $PQ \parallel FG$ zieht, das $\triangle AQP$ das verlangte.

Beweis. Da $PQ \parallel FG$ ist, so ist $\triangle AQP \sim \triangle AFG$. Ferner ist $AD : AK : AC$, also $AD \cdot AC = AK^2 = AP^2$,

$$\begin{aligned} \text{aber } \triangle AQP : \triangle ABD &= AP^2 : AD^2 = AD \cdot AC : AD^2 \\ &= AC : AD \\ \triangle ABC : \triangle ABD &= AC : AD \quad [\S. 76. G.] \end{aligned}$$

folglich $\triangle ABC = \triangle AQP.$

§. 209.

Aufgabe. Es ist innerhalb eines Kreises ein Punct gegeben; man soll durch ihn eine Linie von gegebener Länge als Sehne in den Kreis legen.

Auflösung. (Fig. 157.) Es sei E der gegebene Punct, AB die Sehne. Man trage diese beliebig in den Kreis als Sehne z. B. in CD, fälle vom Mittelpuncte des Kreises I auf CD die Senkrechte IK, und beschreibe damit aus I einen Kreis. An diesen ziehe man von E die Tangente EH, verlängere sie, so ist FG die verlangte Sehne. (Der Beweis ergibt sich, wenn man IL senkrecht auf FG fällt, und findet, dass $IL = IK$ ist [§. 64. Zus. II. G.].

§. 210.

Aufgabe. (Fig. 158.) Die Summe zweier Seiten eines Dreieckes sei a, die dritte b und ein ihr anliegender Winkel α , man soll das Dreieck construiren.

Auflösung. Man zeichne $\angle ABC = \alpha$, mache $BD = a$, $BE = b$, ziehe ED, halbire sie in F, und errichte FG darauf senkrecht, so ist, wenn man EG zieht, das $\triangle BEG$, das verlangte.

Beweis. Es ist $GD = EG$ und $BG + EG = BG + GD = BD = a$ etc.

Aufgabe. Es ist die Summe zweier Seiten a , die dritte b und der ihr gegenüberliegende Winkel α ; man soll das Dreieck construiren.

Auflösung. (Fig. 159.) Man mache $\angle ABC = \alpha$, $BC = a$, und halbiere $\angle ABC$ durch BD , schneide diese aus C mit b in D und E , und ziehe EF oder $GD \parallel AB$, so ist das $\triangle EFC$ oder $\triangle DGC$ das verlangte.

Beweis. Jedes der so eben genannten Dreiecke entspricht der Bedingung der Aufgabe; denn es ist $CD = EC = b$, ferner, da $AB \parallel EF \parallel DG$ ist, $\angle BEF = \angle EBF = \frac{1}{2}\alpha$, also $EF = BF$, $\angle EFC = \alpha$ und $EF + FC = BC = a$; ebenso $\angle BDG = \angle DBG = \frac{1}{2}\alpha$, also $DG = BG$, $\angle DGC = \alpha$ und $DG + GC = BC = a$. Beide Dreiecke EFC und DGC sind congruent, denn zieht man $ab \parallel BC$, so ist $\angle bED = \angle EDb = \frac{1}{2}\alpha$ und da $\angle DEC = \angle EDC$ ist, auch $\angle bDC = \angle bEC = \angle ECF$, ferner $DC = EC$, $\angle DGC = \angle EFC$, mithin $\triangle DGC \cong \triangle EFC$.

§. 212.

Aufgabe. Es ist die Differenz zweier Seiten d , der der kleineren derselben gegenüberliegende Winkel α und die dritte Seite b gegeben; man soll das Dreieck construiren.

Auflösung. (Fig. 160.) Man trage an $BC = b$ den Winkel $\angle DBC = \alpha$, mache $BD = d$, ziehe DC , errichte auf ihrer Mitte E die Senkrechte EA , verlängere BD bis sie letztere schneidet, und ziehe AC , so ist ABC das verlangte Dreieck. (Der Beweis ist leicht zu finden.)

I. Zusatz. Soll α der grösseren Seite gegenüberliegen, so mache man (Fig. 161.) $AB = b$,

$BAF = \alpha$, $AD = d$, ziehe DB , errichte auf ihrer Mitte E die Senkrechte EC bis an den Durchschnittspunkt C mit DF , ziehe endlich CB , so ist ABC das verlangte Dreieck. (Auch hier ist der Beweis leicht).

II. Zusatz. Soll α der Seite b gegenüberliegen, so mache man (Fig. 162.) $DC = d$, $GDC = R$, $EDG = \alpha$, halbire α durch FD , durchschneide diese mit b aus C in A , ziehe AC , halbire AD in I , und errichte BI darauf senkrecht bis an den Durchschnitt B der Richtung DC ; endlich ziehe man AB , so ist ABC das verlangte Dreieck. Denn es ist $IBD + IDB = R = IDB + IDG$, also $IBD = IDG = \frac{1}{2} \alpha$ und $ABC = \alpha$ der Seite $AC = b$ gegenüber. Auch ist $AB = BD$, folglich $d = DC = BC = BD = BC = AB$.

§. 213.

Aufgabe. Es soll ein Dreieck construirt werden, wovon die Summe zweier Seiten a , die dritte b , und die Differenz der ihr anliegenden Winkel α ist.

Auflösung. (Fig. 163.) Man mache $AB = b$, $ABD = \alpha$, halbire α durch EB , mache $EBF = R$, durchschneide BF aus A mit a in G , errichte in der Mitte H von BG auf diese HC senkrecht bis sie AG in C schneidet, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Es ist klar, dass $AB = b$, und da $CG = CB$ ist, dass $AC + CB = AC + CG = AG = a$ ist: es ist nur noch zu zeigen, dass $\beta - \gamma = \alpha$ ist. Der Construction gemäss ist $CH \perp EB$, also $BCH = EBC = \frac{1}{2} \alpha + \gamma$ und $BCG = \alpha + 2\gamma = \beta + \gamma$, daher $\alpha = \beta - \gamma$.

§. 214.

Aufgabe. Man soll ein Dreieck construiren, worin eine Seite a , dann die von ihren Endpuncten auf die beiden andern Seiten gefällten Senkrechten b und c sind.

Auflösung. (Fig. 164.) Man mache $AB = a$, beschreibe darüber einen Halbkreis, mache die Sehne $AB = b$, und die $BE = c$, ziehe DB und AE und verlängere beide bis zum Durchschnittspuncte C , so ist ABC das verlangte Dreieck. (Der Beweis ist leicht.)

§. 215.

Aufgabe. Es werde ein Dreieck construiert, dessen Grundlinie a , Höhe b und der, der Seite a entgegenstehende, Winkel α werde.

Auflösung. (Fig. 165.) Man mache $AB = a$, $AD = DB$, $EDB = R$, $ED = b$, ziehe durch E die Linie $FG \perp AB$, mache $BAH = \alpha$, errichte in A auf AH die Senkrechte AI bis sie ED schneidet, beschreibe mit AI einen Kreis, und ziehe von C oder K nach A und B Linien; so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. $AB = a$ ist Grundlinie und $ED = b$ die Höhe des Dreieckes, dann $ACB = BAH = \alpha$. [§. 66. Geom.]

§. 216.

Aufgabe. Man construire das Dreieck, welches die Seite a , die dazu gehörige Höhe b , und noch eine der beiden andern Höhen $= c$ hat.

Auflösung. (Fig. 166.) Man mache $AB = a$, $ABD = R$, $BD = b$, ziehe $DE \perp AB$, beschreibe

über AB einen Halbkreis, trage darein, von A aus, $AF = c$ als Sehne, ziehe BF bis C und dann AC, so ist ABC das verlangte Dreieck. (Der Beweis hat keine Schwierigkeit.)

§. 217.

Aufgabe. Es werde ein Dreieck construiert, bei welchem α ein Winkel, a die Höhe auf einem seiner Schenkel und b die Höhe aus dem Scheitel von α auf die Gegenseite ist.

Beweis. (Fig. 167.) Es sei $ABD = \alpha$; man mache $EBD = R$, $EB = a$, ziehe durch E, $EA \parallel BD$, beschreibe über AB einen Halbkreis, und durchschneide diesen aus B mit $BF = b$; ziehe endlich AF bis C, dann ist $\triangle ABC$ das verlangte. (Der Beweis ist leicht.)

§. 218.

Aufgabe. Man construiere ein Dreieck, bei welchem die Summe zweier Seiten a , die Höhen auf diese beiden b und c sind. [§. 190.]

Auflösung. (Fig. 144.) Man mache $AB = b$, $BC = c$, $EAC = R$, schneide AE aus C mit a in D, ziehe $DC = a$, mache $DCF = R$ und $FC = c$, ziehe $GF \parallel DC$, so entsteht der Durchschnittspunkt G; errichte endlich HB in B senkrecht auf AC, so entsteht ein Durchschnitt in H, und es ist, wenn man GH zieht, das $\triangle DGH$ das verlangte.

Beweis. Man fälle GI und HK senkrecht auf DH und DG, so ist $GI = FC = c$ und $HK = AB = b$. Es ist ferner $GDI = BHC$, $GI = FC = BC = c$

und $I = B = R$, folglich $\triangle GDI \cong \triangle HBC$, also $GD = HC$, und $GD + DH = HC + DH = DC = a$.

§. 219.

Aufgabe. Es werde ein Dreieck mit den beiden Winkeln α und β construirt, dessen Umfang a ist.

Auflösung. (Fig. 168.) Man mache $MN = a$, $OMN = \alpha$, $PNM = \beta$, halbire diese beiden Winkel, durch den Durchschnittspunkt A ziehe man $AB \parallel OM$ und $AC \parallel PN$, so ist ABC das verlangte Dreieck. (Der Beweis ist leicht.)

§. 220.

Aufgabe. Es werde ein Dreieck construirt, bei welchem die Summe der Seiten a , ein Winkel α , und eine von den beiden diesem Winkel gegenüberliegenden Höhen b ist.

Auflösung. (Fig. 169.) Man mache $MN = a$, $MNO = R$, $ON = b$, $OP \parallel MN$, $MNQ = \alpha$, $ANQ = ANM = \frac{1}{2} \alpha$, ziehe AM , dann $AB \parallel QN$, mache $AD = DM$ und $ADC = R$, und ziehe AC , so ist ABC das Dreieck. (Der Beweis hat keine Schwierigkeit.)

Zusatz. Soll eine Höhe b durch die Winkelspitze von α gehen, und ist a die Summe der Seiten, so mache man (Fig. 170.) $MN = a$, $MNO = R$, $NO = b$, $PO \parallel MN$, $NMU = \frac{1}{2} \alpha$, $MD = DN$, $MDU = R$, beschreibe aus U mit UM einen Kreisbogen, ziehe AM und AN , halbire diese in G und F , und errichte darauf die Senkrechten GB und FC ; ziehe endlich AB und AC , so ist ABC das verlangte Dreieck. (Beweis.) Dass $ON = b$ die Höhe von A auf BC ist, ist klar, ebenso dass $AB + BC + AC = MB + BC + CN = a$ ist. Um

zu zeigen, dass $\angle BAC = \alpha$ ist, ziehe man AU , so ist, da $AU = MU$ ist, $\angle MAU = \angle AMU$, ebenso $\angle BAM = \angle AMB$, folglich $\angle MAU - \angle BAM = \angle AMU - \angle AMB$, oder $\angle BAU = \angle BMU = \frac{1}{2} \alpha$. Ebenso ergibt sich, dass $\angle CAU = \frac{1}{2} \alpha$ ist, also $\angle BAC = \alpha$.

§. 221.

Aufgabe. Man soll ein Viereck construiren, bei welchem drei Seiten a, b, c und zwei einander gegenüberliegende Winkel α und β sind.

Auflösung. Mit a, b und dem eingeschlossenen Winkel α zeichne man ein Dreieck; mit der erhaltenen dritten Seite desselben und mit c und β ebenfalls ein anderes Dreieck, in welchem aber β der dritten Seite des ersteren Dreieckes gegenübersteht, und setze beide Dreiecke mit dieser Seite zusammen.

§. 222.

Aufgabe. Man construire ein Viereck, welches die drei Winkel α, β, γ und als zwei gegenüberstehende Seiten a und b hat.

Auflösung. (Fig. 171.) Man mache $AB = a$, zeichne daran α und β , setze an den Schenkel AF in irgend einem Punkte z. B. F den Winkel γ an, mache $FE = b$, $CE \parallel AF$ und durch den Durchschnittspunkt C , $CD \parallel FE$, so ist auch $\angle ADC = \gamma$ und $DC = FE = b$, also BD das verlangte Viereck.

§. 223.

Aufgabe. Man construire ein Viereck, bei wel-

chem a , b , c , drei Seiten, und α und β die zwei an der vierten Seite anliegenden Winkel sind.

Auflösung. (Fig. 172.) Man trage an die Endpunkte einer beliebigen Linie AN die Winkel α und β an, mache $AB = a$, $NP = c$, $QP \parallel AN$, durchschneide mit b aus B die Linie QP in C , ziehe BC und dann $CD \parallel NP$; so ist BD das verlangte Viereck. (Der Beweis ist leicht.)

§. 224.

Aufgabe. Es werde ein Viereck construiert, bei welchem a , b zwei Seiten, und α der eingeschlossene Winkel, dann β und γ jene zwei Winkel sind, welche die durch den Scheitel von α gehende Diagonale an der gegenüberstehenden Ecke bildet.

Auflösung. (Fig. 173.) Man mache $AB = a$, $\angle ABC = \alpha$, $BC = b$, ziehe AC , mache ferner $\angle ACE = \beta$, $\angle CAE = \gamma$, beschreibe durch A , E und C einen Kreis, ziehe von E durch B die Linie ED , dann AD und DC , so ist $ABCD$ das verlangte Viereck. Denn es ist $\angle ADE = \angle ACE = \beta$ und $\angle EDC = \angle CAE = \gamma$.

§. 225.

Aufgabe. (Fig. 174.) Es ist ein rechter Winkel ABC und in seinem Schenkel ein Punkt D gegeben, man soll einen Kreis beschreiben, welcher CB tangirt, durch den Punkt D geht und zwar so, dass die Tangente des Kreises in D mit BD einen gegebenen Winkel α bilde.

Auflösung. Man trage an DB den Winkel $\angle EDB = \alpha$, mache $EF = ED$, und errichte auf diesen beiden Linien in F und D Senkrechte; ihr Durchschnitts-

punct G ist dann der Mittelpunkt und GF und GD sind die Radien des Kreises.

Beweis. Man ziehe GE, so ist $\triangle GEF \cong \triangle GED$ [§. 31. Zus. II. G.], also $GF = GD$. Weil $GFB = R$ ist, so ist FB eine Tangente. Dass EDB der verlangte Winkel ist, erhellet aus der Construction.

Aufgabe. Es werde ein Viereck construct, bei welchem α , β zwei Seiten, und γ der eingeschlossene Winkel, dann δ und ϵ je zwei Winkel sind, welche die durch den Scheitel von α gehende Diagonale an der gegenüberstehenden Ecke bildet.

Auflösung. (Fig. 173.) Man mache $AB = \alpha$, $ABC = \epsilon$, $BC = \beta$, ziehe AC, mache ferner $ACE = \delta$, $CAE = \gamma$, beschreibe durch A, E und C einen Kreis, ziehe von E durch B die Linie ED, dann AD und DC, so ist ABCD das verlangte Viereck. Denn es ist $ADE = ACE = \delta$ und $EDC = CAE = \gamma$.

Aufgabe. (Fig. 174.) Es ist ein rechter Winkel ABC und in seinem Scheitel ein Punkt D gegeben; man soll einen Kreis beschreiben, welcher CB tangirt, durch den Punkt D geht und zwar so, dass die Tangente des Kreises in D mit BD einen gegebenen Winkel ϵ bilde.

Auflösung. Man trage an DB den Winkel EDB $= \epsilon$, mache $EF = ED$, und errichte auf diesen beiden Linien in F und D Senkrechten; ihr Durchschnitts-

oder mehrere bestimmte, oft auch in unendlicher Entfernung gedachte Punkte gehen, gegen fixe Linien oder Flächen eine bestimmte Lage beibehalten oder diese selbst treffen muss. Solche Linien oder Flächen werden die Leitlinien, Richtungslinien (Directrices) und Richtungsfächen genannt.

2) Aus dem Vorhergehenden wird nun klar, dass

eine Fläche nur dann bestimmt ist, wenn sowohl die Natur der Erzeugenden, als auch das Ge-

II. Theil.

Geometrie im Raume und Stereometrie.

oder nur das Gesetz der Bewegung (Hilfswise oder ganz) oder wenn beide zugleich sich ändern.

3) Alle Flächen, deren Erzeugende als Erzeugende haben, werden geradlinig erzeugt, jene

I. Abschnitt.

Von der Lage gerader Linien gegen Ebenen und der Ebenen unter sich.

Unter den geradlinig erzeugten Flächen ist die Ebene Fläche oder Ebene die einfachste, und von

§. 1.
Erklärung. 1) Bewegt sich eine beliebige Linie [gerade oder krumme] so, dass sie ihre Lage, oft auch ihre Form, nach einem bestimmten stetigen Gesetze ändert, so beschreibt dieselbe eine Fläche.

Die sich bewegende Linie wird Erzeugende [Generatrix] genannt; das bestimmte Gesetz, nach welchem die Bewegung der Erzeugenden vor sich geht, ist in der Regel durch Bedingungen ausgedrückt, welche jene zu erfüllen hat, damit keine Lage oder Formänderung nach Willkühr stattfinden kann.

Diese Bedingungen bestehen gewöhnlich darin, dass die Erzeugende während ihrer Bewegung durch einen

oder mehrere bestimmte, oft auch in unendlicher Entfernung gedachte, Punkte gehen, gegen fixe Linien oder Flächen eine bestimmte Lage beibehalten oder diese selbst treffen muss. Solche Linien oder Flächen werden Leitlinien, Richtungslinien [Directrices] und Richtungsflächen genannt.

2) Aus dem Vorhergehenden wird nun klar, dass eine Fläche nur dann vollkommen bestimmt ist, wenn sowohl die Natur der Erzeugenden, als auch das Gesetz der Bewegung ganz und gar angegeben ist.

Ferner ist daraus zu entnehmen, dass man verschiedene Flächen erhält, wenn die Erzeugende allein, oder nur das Gesetz der Bewegung [theilweise oder ganz], oder wenn beide zugleich sich ändern.

3) Alle Flächen, welche eine Gerade als Erzeugende haben, werden geradlinig erzeugte, jene aber, deren Erzeugende irgend eine Curve ist, werden krummlinig erzeugte Flächen genannt.

Unter den geradlinig erzeugten Flächen ist die ebene Fläche oder Ebene die einfachste, und von dieser soll vorläufig auch nur die Rede sein.

4) Der geometrische Ort aller verschiedenen Lagen einer unbegrenzten geraden Erzeugenden, welche sich so fortbewegt, dass sie während ihrer Ortsveränderung eine der Lage nach bestimmte Gerade und einen ausserhalb der letzteren liegenden fixen Punkt trifft, wird eine ebene Fläche oder Ebene genannt.

Jener fixe Punkt kann entweder in endlicher Entfernung angegeben sein, und in diesem Falle schneiden sich alle einzelnen Lagen der Erzeugenden in demselben; oder er kann auch in unendlicher Entfernung

gedacht werden, wobei sodann nothwendig alle Lagen der Erzeugenden unter sich parallel sein müssen. Daher kann man auch eine Ebene als geometrischen Ort aller unter sich parallelen Lagen einer geraden Erzeugenden betrachten, welche stets und bei jeder Ortsveränderung, eine andere der Lage nach gegebene Gerade trifft.

5) Bleibt die Erzeugende einer Ebene in ihrer anfänglichen fixen Lage, während die anfänglich als Richtungslinie angegebene Gerade stets jene treffend, und mit ihrer Lage parallel bleibend, sich fortbewegt, so entsteht dieselbe Ebene, d. h. man kann immer die Erzeugende mit der Richtungslinie bei einer Ebene vertauschen, ohne die Lage der letzteren zu ändern.

§. 2.

Folgerungen aus den Erklärungen des vorigen Paragraphes.

1) In einer gegebenen Ebene kann man irgend eine Gerade als Richtungslinie und jede andere, die diese schneidet, als eine Lage der Erzeugenden betrachten, deren einzelne verschiedene Lagen, jene Ebene bilden.

2) Eine Gerade L , welche zwei beliebige in einer gegebenen Ebene liegende Gerade schneidet, oder die eine derselben trifft und mit der anderen parallel ist, muss ganz und gar in die Ebene fallen, so weit man sie auch verlängert denken kann.

Denn betrachtet man die erste jener in der Ebene angenommenen Geraden als Richtungslinie, die zweite aber als Erzeugende der Ebene, so wird, wenn diese

von der Geraden L geschnitten wird, auch jede Lage der Erzeugenden von L getroffen werden. Diese Durchschnittspunkte müssen aber alle in der Ebene liegen [§. 1. 4.], daher liegt die Gerade L ganz und gar in der Ebene. — Ist die Gerade L mit der Erzeugenden parallel, so muss sie ohnediess in der Ebene liegen, weil sie die Richtungslinie trifft, und daher als eine Lage der Erzeugenden angesehen werden kann.

Hieraus folgt auch

3) Eine Gerade kann nicht zum Theil in, zum Theil aber ausserhalb einer Ebene liegen; sondern muss, wenn sie nur zwei Punkte mit der Ebene gemein hat, in diese ganz und gar fallen.

4) Eine Ebene kann von einer Geraden nur in einem Punkte getroffen werden, denn würde auch ein noch so kleiner Theil der Geraden in die Ebene fallen, so müsste sie ganz und gar in diese zu liegen kommen [3]. Diesen Punkt nennt man den Durchgangspunkt der Geraden mit der Ebene.

5) Steht eine Gerade L auf jeder beliebigen in einer Ebene durch ihren Durchgangspunkt gezogenen Geraden senkrecht, so ist sie auf der Ebene selbst senkrecht, denn jede durch jenen Durchgangspunkt in der Ebene gezogene Gerade kann als eine Lage der Erzeugenden [§. 1. 4.] der Ebene betrachtet werden, und wenn die Gerade L auf alle verschiedene Lagen der Generatrix senkrecht steht, so muss sie auch auf der Ebene selbst, dem geometrischen Orte aller dieser Lagen senkrecht sein.

§. 3.

Lehrsatz. Durch eine Gerade und einen aus-

serhalb ihr liegenden Punct ist die Lage einer Ebene vollkommen bestimmt.

Beweis. Nimmt man eine Ebene an, welche die angegebene Gerade enthält, so wird dieselbe, ohne dass sie die Gerade verlässt, um diese noch gedreht werden und unendlich viele Lagen annehmen können. Bewegt sich dieselbe aber so weit, bis sie nebst der Geraden auch noch den angegebenen Punct enthält, so wird sie, ohne diesen oder die Gerade zu verlassen, keine neue Lage mehr annehmen können: d. h. diese Ebene ist der Lage nach vollkommen bestimmt.

Zusatz I. Durch drei Puncte, die nicht in einer Geraden liegen, ist die Lage einer Ebene vollkommen bestimmt; denn verbindet man zwei dieser Puncte durch eine Gerade, so hat man wieder die im Lehrsatze ausgesprochenen Bedingungen.

Zusatz II. Zwei gerade Linien, die sich schneiden, bestimmen die Lage einer Ebene ganz und gar. Denn legt man durch einen Punct der einen Geraden und durch die andere eine Ebene, so ist die Lage derselben vollkommen bestimmt, und die erste Gerade muss ganz in diese Ebene zu liegen kommen [§. 2. 3.].

Zusatz III. Zwei parallele Gerade bestimmen die Lage einer Ebene. Denn schneidet man beide Parallelen durch eine Gerade, und legt durch diese und eine der Parallelen eine Ebene, so wird die Lage der letzteren [Zus. II.] bestimmt sein. Diese Ebene enthält aber sodann auch die zweite der Parallelen, [denn es muss die durch den Durchschnitts-

punct der letzteren und der Hülfsgeraden in der Ebene zur ersten Geraden gezogene Parallelen schon mit jener zusammenfallen] also ist durch beide die Lage einer Ebene völlig bestimmt.

Zusatz IV. Durch zwei gerade Linien, die sich nicht schneiden und verschiedene Richtungen angeben, kann man keine Ebene legen. Zwei solche Gerade haben übrigens — wie später gezeigt werden soll — nicht überall gleichen Abstand, sind also auch nicht parallel.

Anmerkung. Aus den hier dargelegten Sätzen ersieht man, welche Bestimmungsstücke gegeben sein müssen, wenn eine Ebene der Lage nach angegeben werden soll; dass ferner durch diese Bestimmungsstücke auch nur eine einzige Ebene gelegt werden kann.

§. 4.

Lehrsatz. Der gemeinschaftliche Durchschnitt zweier sich schneidenden Ebenen ist eine Gerade.

Beweis. Der Durchschnitt beider Ebenen muss jedenfalls eine Linie sein [§. 1. eb. G.], weil hier sowohl die eine als auch die andere Ebene begrenzt wird.

Ausserdem muss er auch die Eigenschaft haben, ganz und gar in beiden Ebenen zu liegen, was voraussetzt, dass alle Punkte dieser Durchschnittslinie in einer und derselben Richtung liegen. Würden nämlich nur drei Punkte derselben nicht dieselbe Richtung haben, so könnte man durch diese eine, aber auch nur eine Ebene legen [§. 3. Zus. I.], und es müssten daher beide Ebenen mit dieser zusammenfallen.

Anmerkung. Dieser Satz musste, obgleich die Eigenschaften bezüglich der Geraden gegen Ebenen noch nicht erörtert sind, im Voraus dargelegt werden, weil im Folgenden sehr oft eine Ebene zu Hülfe genommen und deren Durchschnitt mit anderen Ebenen benützt wird.

§. 5.

Lehrsatz. Steht eine Gerade auf zwei beliebigen in einer Ebene liegenden und durch ihren Durchgangspunct gehenden Geraden senkrecht, so steht sie auf der Ebene selbst senkrecht.

Beweis. [Fig. 1.]

Thes. $ab \perp \text{Eb. MN}$

Dat. 1) bc, bd und be liegen in Ebene MN .

2) $abc = abd = R$.

Es ist nur [§. 2. 5.] zu zeigen, dass ab senkrecht auf jeder beliebigen durch den Durchgangspunct b gehenden und in der Ebene MN liegenden Geraden be senkrecht steht. Zu dem Ende verlängere man cb so, dass $bg = bc$, ferner db so, dass $fb = bd$ wird, ziehe cd und fg und verlängere eb bis zum Durchschnittspuncte h mit fg . Ferner lege man durch fd und ba eine Ebene [§. 3. Zus. II.] und ziehe in dieser fa und da , sodann durch gc und ba eine Ebene, und ziehe in dieser ag und ac und endlich durch he und ba eine solche, und ziehe ha und he ; so ist, wenn man die hier vollzogenen Constructionen und die gemachten Voraussetzungen benützt:

1) $\triangle fbg \cong \triangle cbd$ [§. 20. eb. G.]

$$\left. \begin{array}{l} \text{also } cd = fg \\ bcd = fgb \\ \text{und } bdc = bfg \end{array} \right\} [\S. 20. \text{Zus. II. eb. G.}]$$

$$2) \triangle abg \cong \triangle abc [\S. 20. \text{eb. G.}],$$

daher $ag = ac$ [$\S. 20. \text{Zus. II. eb. G.}$].

$$3) \triangle afb \cong \triangle abd [\S. 20. \text{eb. G.}],$$

also $af = ad$ [$\S. 20. \text{Zus. 2. eb. G.}$].

Da nun

$$\begin{array}{l} fg = cd \text{ [nach 1.]} \\ ga = ac \text{ [nach 2.]} \text{ und} \\ af = ad \text{ [nach 3.]} \text{ ist,} \end{array}$$

so hat man 4) $\triangle agf \cong \triangle adc$ [$\S. 22. \text{eb. G.}$]

$$\left. \begin{array}{l} \text{und daher } agf = acd \\ \text{und } afg = adc \end{array} \right\} [\S. 20. \text{Zus. II.}]$$

Ferner ist

$$5) \triangle hbg \cong \triangle bce [\S. 32. \text{eb. G.}],$$

daher $hg = ce$
und $hb = be$ } [$\S. 20. \text{Zus. II. eb. G.}$].

Sohin auch,

$$\begin{array}{l} \text{da } ag = ac \text{ [nach 2.]} \\ \text{und } hga = ace \text{ [nach 4.]} \end{array}$$

$$6) \triangle ahg \cong \triangle ace [\S. 20. \text{eb. G.}],$$

also $ah = ae$ [$\S. 20. \text{Zus. II.}$].

Ausserdem ist noch

$$\begin{array}{l} hb = be \text{ [nach 5.]} \\ ab = ab, \end{array}$$

also 7) $\triangle abh \cong \triangle abe$ [$\S. 22. \text{eb. G.}$] und

$$abh = abc = R \text{ } [\S. 20. \text{Zus. II. und } \S. 9. \text{Zus. II. der eb. G.}].$$

Auf gleiche Weise könnte man zeigen, dass ab

auf jeder anderen durch b gehenden und in Ebene MN liegenden Geraden senkrecht steht, daher ist auch [§. 2. 5.]

ab $\perp$ Eb. MN ,
was zu beweisen war.

Zusatz I. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so bildet sie mit allen Geraden, die durch ihren Fuss gehen, und in der Ebene liegen, rechte Winkel.

Zusatz II. Von einem ausserhalb einer Ebene liegenden Puncte aus, kann man auf diese nur eine Senkrechte ziehen.

[Fig. 1.] Ist a der ausserhalb Ebene MN angenommene Punct, so gibt es auf diese nur die einzige Senkrechte ab von a aus. Denn gesetzt man könnte noch eine zweite Gerade, z. B. ac senkrecht auf Ebene MN ziehen, so lege man durch ab und ac eine Ebene [§. 3. Zus. II.] und bestimme ihren Durchschnitt bc mit Ebene MN . Es wäre nun im $\triangle abc$:

$$abc = acb = R,$$

was unmöglich ist [§. 29. Zus. I. eb. G.], daher kann, wenn ab senkrecht auf Ebene MN ist, keine zweite Senkrechte von a aus auf diese gezogen werden.

Zusatz III. Von einem Puncte in einer Ebene gibt es auf diese auch nur eine einzige Senkrechte.

Denn gesetzt es wäre [Fig. 1.] ausser ba , durch b noch eine zweite Gerade bk auf Ebene MN senkrecht zu ziehen möglich, so lege man durch ab und bk eine Ebene [§. 3. Zus. II.], diese schneide Ebene MN

nach der Geraden bl , dann wäre in einer und derselben Ebene

$$abl = kbl = R,$$

was unmöglich ist, da ein Theil dem Ganzen nie gleich sein kann. Eine zweite Senkrechte ist daher von b aus auf Ebene MN nicht möglich.

§. 6.

Lehrsatz. [Fig. 1.] Zieht man von einem Punkte ausserhalb einer Ebene auf diese eine Senkrechte und mehrere schräge Linien, so ist

1) Die Senkrechte die kürzeste Linie, welche man von jenem Punkte auf die Ebene ziehen kann.

2) Jene schräge Linien, deren Durchgangspunkte vom Fusse der Senkrechten gleich weit abstehen, sind einander gleich.

3) Unter allen jenen schrägen Linien ist diejenige die grösste, deren Durchgangspunkt vom Fusse der Senkrechten am weitesten entfernt ist.

Beweis.

ad 1. Thes. $ab \angle ac$, $ab \angle ae$ etc.

Dat. $ab \perp$ Eb. MN .

Legt man durch ab und ac , ab u. ae etc. Ebenen, so schneiden diese die Ebene MN beziehungsweise nach den Geraden bc , be etc. Es sind nun, da [§. 5. Zus. I.] $abc = abe$ etc. $= R$ ist, die Dreiecke abc , abe etc. rechtwinklig, und zwar ac , ae etc. die Hypotenusen dieser Dreiecke.

Jedenfalls ist daher

$$ab \angle ac$$

$$ab \angle ae \text{ etc.}$$

} [§. 30. Zus. II. eb. G.]

Beweis ad 2. Thes: $ac = ad = af$.

Daten: $ab \perp Eb$. MN.

$bc = bd = bf$.

Da $abc = abd = abf = R$ [§. 5. Zus. I.] ist,

ferner $bc = bd = bf$ [Dat.]

und $ab = ab = ab$,

so wird $\triangle abc \cong \triangle bda \cong \triangle baf$,

also auch $ac = ad = af$ [§. 20. Zus. II. eb. G.]

Beweis ad 3. Thes. $ac > ae$

Dat. $bc > be$

Da $be < bc$ [Dat.], so kann man be auf bc auftragen. Macht man daher $be' = be$, und zieht ae' , so muss

$ae' = ae$ [Lehrs. 2. §. 6.]

Verlängert man aber ab unterhalb der Eb . MN so, dass $ba' = ba$ wird, und zieht $a'e'$ und $a'c$, so müssen diese in Eb . abc liegen [§. 2. 3.].

Es ist aber $\triangle abe' \cong \triangle a'be'$
und $\triangle abc \cong \triangle a'bc$ } [§. 20. eb. G.],

also $ae' = a'e'$
und $ac = a'c$ } [§. 20. Zus. II. eb. G.]

Ferner ist, wenn ae' bis k' verlängert wird:

$ac + ck' + a'k' + e'k' > ae' + e'k' + a'e'$, also

$ac + a'c > a'e + a'e'$, oder

$2ac > 2ae'$,

also $ac > ae'$.

Zusatz I. Ist [Fig. 1.] $ac = ad = al$,

so hat man, da $abc = abd = abl = R$

und $ab = ab = ab$

$\triangle abc \cong \triangle abd \cong \triangle abl$ [§. 31.

Zus. II. eb. G.],

also $bc = bd = bl$ [§. 20.
Zus. II. eb. G.].

d. h. zieht man von einem Punkte ausserhalb einer Ebene auf diese eine Senkrechte und mehrere gleichlange schräge Linien, so liegen die Durchgangspunkte der letzteren auf der Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Fuss der Senkrechten ist. —

Zusatz II. Aus dem 2. Theile des Lehrsatzes hat man noch

$$\angle acb = \angle adb = \angle alb$$

d. h. der Winkel, welchen die Gerade ac mit cb bildet, bleibt unverändert, wenn auch ac ihre Lage ändert, während ihre Länge sich gleich bleibt; ferner ist aber auch leicht zu zeigen, dass Winkel acb der kleinste unter allen Winkeln ist, den ac mit irgend einer in Eb. MN durch c gezogenen Geraden bildet, daher folgt der Satz:

Dass, wenn man von einem Punkte ausserhalb einer Ebene auf diese eine Senkrechte und eine schräge Linie zieht, und den Durchgangspunkt der letztere mit dem Fusspunkte der ersteren verbindet, der Winkel, den diese Verbindungslinie mit der schrägen Linie bildet, der kleinste unter allen Winkeln ist, welche die letztere mit anderen durch ihren Durchgangspunkt in der Ebene gezogenen Geraden bildet, und sich nicht ändert, wenn diese Gerade, während ihre Länge dieselbe bleibt, auch um die Senkrechte gedreht wird.

Diesen Winkel nennt man daher den Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene.

Es ist leicht einzusehen, dass $\angle cab = 90^\circ - \angle acb$, das Complement jenes Neigungswinkels ist. —

Anmerkung. Es ist nach 1. dieses Lehrsatzes die Senkrechte die kürzeste unter allen Linien, welche man von einem Puncte ausserhalb einer Ebene auf diese ziehen kann; man benützt daher dieselbe, um den Abstand eines Punctes von einer Ebene zu finden.

Der Abstand oder die Entfernung eines Punctes von einer Ebene ist also die Senkrechte, welche man vom Puncte auf die Ebene ziehen kann.

§. 8.

Aufgaben. [Fig. 1.] 1). Von einem Puncte ausserhalb einer Ebene auf diese eine Senkrechte zu ziehen.

Auflösung und Beweis. Man nehme vom angegebenen Puncte a aus eine beliebige Gerade ac in den Zirkel [die wenigstens so lang ist, als die Entfernung des Punctes a von einem in der Ebene beliebig angenommenen Puncte], und bezeichne mit derselben drei Puncte c , d und l , in der Ebene, so dass also $ac = ad = al$ wird, suche den Mittelpunkt b des Kreises, auf dessen Peripherie die Puncte c , d und l liegen, so muss derselbe [§. 7. Zus. I.] der Fusspunct der gesuchten Senkrechten sein. Verbindet man daher den angegebenen Punct a mit dem gefundenen b , so wird die Gerade ab die gesuchte Senkrechte sein. —

2) Von einem in einer Ebene MN liegenden Punkte b aus auf diese eine Senkrechte zu ziehen.

Auflösung. Da nur noch ein Punct, der zu construierenden Senkrechten zu suchen, ihre Länge aber sonst beliebig ist, so kann man in der Zeichnungsebene ein beliebiges Stück derselben annehmen, z. B. eine Länge, welche gleich ab ist. Hierauf ziehe man in der Ebene MN durch den Punct b zwei Gerade bc und be von beliebiger Länge, und construiere in dieser Ebene zwei rechtwinklige Dreiecke, deren Katheten bc und be gegeben, und welche die gemeinschaftliche Kathete ab haben, so wird das eine Dreieck die Hypotenuse ca, das andere die Hypotenuse ea erhalten.

Stellt man nun beide rechtwinklige Dreiecke auf die Grundlinien bc und be, dreht sie um diese so weit, bis sie die zweite Kathete gemeinschaftlich haben, so wird diese letztere die verlangte Senkrechte sein. —

Denn es ist vermöge Construction, jedes der Dreiecke abc und abe rechtwinklig, also

$$abc = abe = R,$$

folglich $ab \perp \text{Eb. MN}$ [§. 5.]. (*)

3) Den Winkel, den eine Gerade mit einer Ebene bildet, zu finden.

Auflösung und Beweis. Man ziehe von einem beliebigen Punkte der Geraden auf die Ebene eine Senkrechte [Aufg. 1.], und messe den Winkel, den diese mit der Geraden bildet, ergänze ihn sodann zu 90° , so

(*) Mit Benützung der Aufgabe 1. dieses §. und des Lehrsatzes in §. 10. kann man ebenfalls durch einen in einer Ebene liegenden Punct auf jene eine Senkrechte ziehen. —

wird der erhaltene Complementswinkel der gesuchte Neigungswinkel sein [§. 7. Zus. II.].

§. 9.

Lehrsatz. [Fig. 7.] Zieht man von einem Punkte ausserhalb einer Ebene auf diese die Senkrechte, vom Fusse der letzteren aus auf eine in der Ebene angenommene Gerade das Perpendikel, so wird jede Gerade, welche man vom Endpunkte des letzteren aus nach einem beliebigen Punkte der Senkrechten zieht, senkrecht auf der in der Ebene angenommenen Geraden stehen. —

Beweis, Thes: AE senkrecht auf CD.

Dat: CD liegt in Ebene MN, ferner

AB senkrecht auf Eb. MN und

$BED = BEC = R$. Man mache

$DE = EC$, und ziehe BD u. BC,

so ist $\triangle BDE \cong \triangle BEC$ [§. 20. eb. G.]

also $BD = BC$ [§. 20. Zus. II. eb. G.].

Ferner $ABD = ABC = R$ [§. 5. Zus. I.]

und $AB = AB$.

daher $\triangle ABD \cong \triangle ABC$ [§. 20. eb. G.],

und $AD = AC$ [§. 20. Zus. II. eb. G.].

Da nun ausserdem noch

$DE = CE$ [Construct.]

und $AE = AE$ ist, so wird

$\triangle ADE \cong \triangle ACE$ [§. 22. eb. G.]

also $AED = AEC = R$ [§. 20. Zus. II. eb. G.].

Zusatz I. Da $AED = AEC = R$ [Lehrs.]

ferner $BEC = R$ [Dat.]

so muss auch CD senkrecht auf Ebene ABE stehen [§. 5.]

Zusatz II. Die Geraden AB und CD sind weder parallel, noch schneiden sie sich, aber die auf beiden senkrecht stehende Gerade BE] ist ihr kürzester Abstand. —

§. 10.

Lehrsatz. [Fig. 3.] Steht von zwei oder mehreren, unter sich parallelen, Geraden eine derselben auf einer gegebenen Ebene senkrecht, so muss auch die zweite und jede der übrigen senkrecht auf dieser Ebene stehen.

Beweis. Thes. CD senkrecht auf Ebene MN.

Dat. AB $\nparallel$ CD und

AB senkrecht auf Eb. MN.

Man kann durch AB und CD eine Ebene ABDC legen [§. 3. Zus. III.], der Durchschnitt dieser Ebene BC mit Eb. MN muss sodann die Gerade BD sein [§. 4.]. Da nun die Geraden AB, BD und CD in einer Ebene liegen, so muss, weil CD $\nparallel$ AB [Dat.] ist, auch

$\angle CDB = R$ sein [§. 36. Zus. I. eb. G.].

Zieht man nun in Ebene MN auf BD die Senkrechte DF, so muss DF senkrecht auf Eb. ABC stehen [§. 9. Zus. I.], daher

muss auch $\angle FDC = R$ sein [§. 5. Zus. I.].

Ausserdem war $\angle CDB = R$, daher

CD senkrecht auf Eb. MN [§. 5.]. —

§. 11.

Lehrsatz. [Fig. 4.] Stehen zwei oder mehrere Gerade auf einer und derselben Ebene senkrecht, so sind dieselben parallel.

Beweis. Thes. $AB \parallel CD$

Dat. AB senkrecht auf Eb. MN

CD senkrecht auf Eb. MN .

Gesetzt es wäre DC nicht parallel zu AB , so könnte man durch D mit AB eine Parallele ziehen, z. B. DE . Diese müsste aber sodann nach §. 10. auch senkrecht auf Ebene MN sein, was nach §. 5. Zusatz III. nicht möglich ist, wenn nicht die Parallele DE mit DC zusammenfällt.

Sohin ist $DC \parallel AB$, w. z. b. w.

§. 12.

Lehrsatz. Sind im Raume zwei Gerade zu einer dritten parallel, so müssen dieselben auch unter sich parallel sein.

Beweis. Thes. $EF \parallel AB$

Dat $CD \parallel AB$

$CD \parallel EF$.

Legt man Ebene MN senkrecht auf CD , so muss sowohl AB als EF senkrecht auf Ebene MN stehen [§. 10.]. Da also AB sowohl, als auch EF , senkrecht auf Ebene MN ist, so muss auch $AB \parallel EF$ [§. 11.] sein. —

§. 13.

Erklärungen. 1) Eine Gerade ist zu einer Ebene parallel, wenn beide, so weit verlängert und erweitert, als nur denkbar ist, nicht zusammentreffen.

Wenn nämlich keine in der Ebene liegende Gerade von jener Geraden getroffen wird, so kann auch die

letztere mit der Ebene nicht zusammentreffen, weil man jede Gerade in der Ebene als eine Lage ihrer Erzeugenden annehmen kann. —

2) Zwei Ebenen sind zu einander parallel, wenn sie, so weit man sie auch als erweitert denken kann, nicht zusammentreffen. —

§. 14.

Lehrsatz. Ist eine Gerade zu einer in einer gegebenen Ebene liegenden Geraden parallel, so ist sie zur Ebene selbst parallel.

Beweis. Thes. $AB \parallel \text{Eb. MN.}$

Dat. $AB \parallel CD$ und CD in Ebene MN .

Würde AB die Eb. MN irgendwo schneiden und man legt durch den Durchschnittspunct eine Parallele zu CD , so müsste dieselbe auch zu AB parallel sein [§. 12.], was absurd ist, es kann daher die Ebene MN von AB nirgends getroffen werden —

Zusatz I. Jede Ebene, welche durch AB gelegt wird, schneidet Eb. MN nach einer Geraden, die zu AB parallel ist. —

Zusatz II. Ist eine Gerade zu einer Ebene parallel, und man zieht von einem beliebigen Punkte der Geraden auf die Ebene eine Senkrechte, so muss letztere auch auf der Geraden senkrecht stehen.

Anmerkung 1). Um durch eine gegebene Gerade eine Ebene zu legen, welche parallel zu einer angegebenen Geraden ist, darf man nur durch einen beliebigen Punct der ersten Geraden eine Parallele zur zweiten legen, so ist durch diese

letztere und die erstere Gerade die Lage der gesuchten Ebene bestimmt.

Anmerkung 2). Die Entfernung einer zu einer Ebene parallelen Geraden von dieser ist eine auf beiden senkrecht stehende Gerade, und zwar der zwischen beiden enthaltene Theil dieser Senkrechten. —

§. 15.

Lehrsatz. [Fig. 6.] Ist eine Gerade zu einer Ebene parallel, so ist sie von dieser überall gleichweit entfernt.

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dass wenn man von zwei verschiedenen Puncten der Geraden auf die Ebene senkrechte Linien zieht, diese einander gleich sein müssen. Nun wurde im I. Zus. des §. 14. erwähnt, dass jede durch AB gelegte Ebene die Ebene MN nach einer zu AB parallelen Linie schneidet.

Wenn man nun durch A und B die Senkrechten AC und BD auf Eb. MN zieht, so müssen diese zu einander parallel sein [§. 11.], und zugleich auf AB senkrecht stehen [§. 14. Zus. II.]. Man kann daher durch AB, AC und BD eine Ebene legen, und diese wird [§. 14. Zus. II.] die Ebene MN nach der Geraden CD schneiden, welche parallel zu AB ist. Daher ist ABDC ein Rechteck, und sohin $AC = BD$, also die Gerade AB, da sie in zwei Puncten dieselben Entfernungen von Eb. MN hat, überall von Eb. MN gleich weit entfernt. —

§. 16.

Lehrsatz. Zwei Ebenen, die auf einer und der selben Geraden senkrecht stehen, sind zu einander parallel.

Beweis. Thes. Eb. MN $\#$ Eb. PQ

Dat. Eb. MN senkrecht auf AB

Eb PQ senkrecht auf AB.

Gesetzt beide Ebenen seien nicht parallel, so müssten sie sich gehörig erweitert, irgendwo schneiden. Wäre nun in C ein Punct ihrer Durchschnittslinie, so müsste CA in Ebene MN und CB in Ebene PQ liegen, also AB sowohl auf AC als auf BC senkrecht sein [§. 5. Zus. I.]. Da aber in einem Dreiecke keine zwei rechte Winkel sein können, so kann auch C kein Punct der Durchschnittslinie beider Ebenen sein, daher können beide Ebenen sich nicht schneiden, und sind sohin [§. 13.] parallel. —

Zusatz. Eine Gerade kann auf zwei sich schneidende Ebenen nicht gleichzeitig senkrecht stehen. —

§. 17.

Lehrsatz. Alle Senkrechten, die man von einem Puncte einer Geraden auf diese errichten kann, liegen in ein und derselben Ebene.

Beweis. Gesetzt es wären in einem Punct einer Geraden drei Senkrechte auf diese errichtet, und diese würden nicht in einer Ebene liegen, so könnte man durch die erste und zweite, und ebenso durch die zweite und dritte eine Ebene legen. Auf diesen beiden Ebenen müsste nun [§. 5.] die gegebene Gerade senk-

recht stehen, also können sie sich nicht schneiden, und müssen daher, weil sie auch nicht parallel sein können, in eine Ebene zusammenfallen: d. h. durch jene drei Senkrechte kann man nur eine Ebene legen. — Ganz dasselbe gilt auch für beliebig viele in einem Punkte der Geraden auf diese errichteten Senkrechten.

Zusatz I. Bewegt sich eine Gerade so, dass sie stets auf einer anderen senkrecht bleibt, so beschreibt sie eine Ebene, die auf der letzteren senkrecht steht.

Zusatz II. Bewegt sich irgend eine Linie oder eine Ebene um eine fixe Gerade, so beschreibt jeder Punkt dieser geometrischen Grössen einen Kreisbogen, dessen Ebene senkrecht auf der Drehungsaxe ist, und dessen Mittelpunkt erhalten wird, wenn man auf letztere vom entsprechenden Punkte aus eine Senkrechte zieht.

§. 18.

Lehrsatz. Werden zwei oder mehrere parallele Ebenen von einer Ebene durchschnitten, so sind die Durchschnittslinien unter sich parallel.

Beweis. Thes. $AB \parallel CD$

Dat. Eb. $MN \parallel$ Eb. PQ ,

AB und CD die Durchschnittslinien der Eb. BD mit den Ebenen MN und PQ .

Diese Geraden AB und CD können sich nicht schneiden, weil sie in Ebenen sich befinden, die, so weit man sie auch erweitern mag, nie zusammentreffen. Sie können aber auch nicht über oder neben einander weggehen, denn sie liegen nach Annahme in einer, nämlich

in der die parallelen Ebenen durchschneidenden Ebene; folglich müssen sie zu einander parallel sein.

§. 19.

Lehrsatz. Werden zwei nicht parallele Ebenen von einer dritten durchschnitten, so müssen die Durchschnitte in einem einzigen Punkte der Durchschnittslinie jener Ebenen zusammentreffen.

Beweis. Die Durchschnitte der dritten Ebene mit den beiden gegebenen Ebenen schneiden die Durchschnittslinie dieser letzteren in Punkten, die in der Ebene liegen, zu der sie gehören. Letztere schneidet aber die Durchschnittslinie der gegebenen zwei Ebenen nur in einem Punkte, also müssen auch jene Durchschnittslinien in diesem Punkte zusammentreffen.

Ist die durchschneidende Ebene mit der Durchschnittslinie der gegebenen Ebenen parallel, so müssen auch ihre Durchschnitte mit den letzteren, zu jener Geraden parallel sein; denn sie liegen in einer Ebene und können sich nicht schneiden.

§. 20.

Lehrsatz. [Fig. 9.] Werden zwei oder mehrere Gerade von drei parallelen Ebenen geschnitten, so stehen die zwischen den Ebenen enthaltenen Theile derselben, in gleichem Verhältnisse.

Beweis. Es ist hier nur nothwendig, diese Behauptung für zwei Gerade nachzuweisen; denn man kann auf dieselbe Weise den Satz noch auf mehr als zwei Gerade ausdehnen. Ferner muss diese Behauptung für zwei Gerade, die weder parallel sind, noch sich schneiden, bewiesen werden; denn für parallele

und sich schneidende Gerade ist der Satz schon aus der ebenen Geometrie bekannt.

Es seien daher MN, PQ und RS die drei Ebenen, von welchen die beiden Geraden AC und DF geschnitten werden, so hat man als

$$\text{Thes. } AB : BC = DE : EF$$

$$\text{Dat. Eb. MN} \# \text{Eb. PQ} \# \text{Eb. RS}$$

Legt man durch D und AC eine Ebene, und zieht in dieser die Gerade DC, so wird sie die Ebene MN und Ebene PQ so schneiden, dass die Durchschnitte AD und BG [§. 18.] parallel sind.

Legt man ferner durch C und DF eine Ebene, so wird dieselbe mit jener die Gerade CD gemein haben, und es ist wieder, wenn E und F die Durchgangspunkte der Geraden DF mit den Ebenen PQ und RS sind,

$$GE \# CF \text{ [§. 18.]}$$

Man hat daher

$$\left. \begin{array}{l} AB : BC = DG : GC \\ \text{und } DE : EF = DG : GC \end{array} \right\} \text{ [§. 79. eb. G.]}$$

$$\text{also } AB : BC = DE : EF.$$

Zusatz I. Würden sich beide Gerade schneiden, so wäre, wenn man sie bis zu ihrem Durchschnitte verlängern würde, die Behauptung schon aus §. 79. der eb. G. klar.

Zusatz II. Wären beide Gerade zu einander parallel, so müsste man durch dieselben eine Ebene legen können. Die Durchschnitte dieser Ebene mit MN und RS wären nun AD und CF, und es müsste $AD \# CF$ [§. 18.] sein. Ausserdem wäre aber $AC \# DF$, also ADFC ein Parallelogramm, und sohin $AC = DF$, d. h.

Die zwischen parallelen Ebenen enthaltenen Theile paralleler Geraden sind einander gleich.

§. 21.

Lehrsatz. [Fig. 10.] Ist von zwei parallelen Ebenen die eine auf einer Geraden senkrecht, so ist es auch die andere. —

Thes. AB senkrecht auf Eb. MN .

Dat. Eb. $MN \parallel$ Eb. PQ ,

$AB \perp$ Eb. PQ .

Legt man durch AB eine beliebige Ebene, z. B. AD , und durchschneidet diese die beiden Ebenen nach BD und AC , so muss

$AC \parallel BD$ [§. 18.] sein.

Nun ist in Eb. AD :

$ABD = R$ [§. 5. Zus. I.],

sohin ist auch $BAC = R$ [§. 35. eb. G.]

Legt man durch AB eine zweite Ebene, z. B. AE , welche die gegebenen Ebenen nach AF und BE durchschneidet, so muss wieder

$AF \parallel BE$ [§. 18.] sein.

Da aber

$ABE = R$ [§. 5. Zus. I.] ist, so muss auch

$BAF = R$ [§. 35. eb. G.] sein.

Oben war $BAC = R$, daher

BA senkrecht auf Eb. MN [§. 5.], w. z. b. w.

Zusatz. Durch einen Punct kann man zu einer gegebenen Ebene nur eine Ebene parallel ziehen.

§. 22.

Lehrsatz. [Fig. 10.] Parallele Ebenen sind überall gleich weit von einander entfernt.

Beweis. Unter der Entfernung zweier Ebenen versteht man den zwischen beiden enthaltenen Theil einer auf beiden Ebenen senkrecht stehenden Geraden.

Zieht man CD und AB auf beide Ebenen senkrecht, und legt durch diese Geraden eine Ebene, so bilden sie mit den Geraden, nach welchen letztere die gegebenen Ebenen schneidet, ein Rechteck [§. 19. Zus. II. und §. 18.], und es sind daher diese Senkrechten einander gleich. Auf dieselbe Weise wird bewiesen, dass irgend zwei Gerade, welche auf beiden Ebenen senkrecht stehen, einander gleich sein müssen. —

§. 23.

Lehrsatz. [Fig. 11.] Sind die Schenkel zweier beliebig im Raume liegenden Winkel parallel, und gehen nach einerlei Gegend hin, so sind

1) die Winkel gleich, 2) die Ebenen, in welchen sie liegen, sind parallel.

Thes. 1. $BAC = EDF$

2) Eb. $BAC \parallel$ Eb. ED

Daten. $BA = DE$

$AC = DF$

Ad 1). Macht man $AB = DE$, und $AC = DF$, legt durch AB und DE ferner durch AC und DF eine Ebene, und zieht in diesen die Geraden AD , CF und BE , so ist, da

$AB \parallel$ und $= DE$

und $AC \parallel$ und $= DF$ ist, auch

$AD =$ und $\parallel$ $CF =$ und $\parallel$ BE [§. 46. Zus. der eb. G. und §. 12.],

daher ist auch

BCFE ein Parallelogramm [§. 46. Zus. eb. G.],
und sohin

$$BC = EF \text{ [§. 45. eb. G.]}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Nun ist } AB = DE \\ \text{und } AC = DF \end{array} \right\} \text{ [Construct.]}$$

$$\text{daher } \triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ [§. 32 eb. G.]}$$

$$\text{und } \angle BAC = \angle EDF \text{ [§. 20. Zus. II. eb. G.]}$$

Ad 2). Wäre Ebene BAC nicht parallel zur Ebene EDF, so könnte man durch A eine Ebene parallel zur Eb. EDF legen.

Würde nun diese die Gerade FC in H und EB in G treffen, so müsste

$$FH = EG = DA \text{ [§. 19. Zus. II.] sein.}$$

$$\text{Nun ist } DA = CF = EB \text{ [Lehrs. I.]}$$

also $FC = FH$ und $EB = EG$, was ungereimt ist.

Es muss daher die durch A zur Ebene EDF parallel gezogene Ebene, mit BAC zusammenfallen, also Eb. BAC $\parallel$ Eb. EDF sein.

Anmerkung. Um durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Ebene eine andere parallel zu ziehen, lege man durch denselben zwei Gerade parallel zu zweien in jener Ebene beliebig angenommen; so wird die durch jene zwei Gerade gelegte Ebene die gesuchte sein.

§. 24.

Hülfsatz. [Fig. 12.] Schneidet man die drei Seiten eines Dreieckes oder deren Verlängerungen durch eine Gerade, so müssen die Producte aus den nicht

aneinanderstossenden Stücken der Seiten beiderseitig einander gleich sein.

Beweis.

Thes. $Aa \times Bb \times Cc = Ba \times Cb \times Ac$.

Dat. a, b und c liegen in einer Geraden.

Man ziehe $Cd \parallel AB$ [§. 38. eb. G.], so ist:

$$\left. \begin{array}{l} Bab = bdC \\ aBb = bCd \end{array} \right\} \text{ [§. 37. I. eb. G.]}$$

daher $\triangle aBb \sim \triangle bCd$ [§. 84. eb. G.].

Sohin $aB : Cd = Bb : bC$ [§. 84. Zus. III. eb. G.]

und $aB \times bC = Bb \times Cd$ [Arithm.] (1.)

Ferner ist

$Aa : Cd = Ac : Cc$ [§. 79. Zus. III. eb. G.]

also $Cd \times Ac = Aa \times Cc$ [Arithm.] (2.)

Multiplicirt man die Gleichungen (2.) und (1.) mit einander, und lässt auf beiden Seiten den Factor Cd hinweg, so wird:

$$Aa \times Bb \times Cc = aB \times bC \times cA,$$

was nachzuweisen war.

§. 25.

Lehrsatz. [Fig. 13.] Schneidet man die vier Seiten eines Viereckes, das nicht in einer Ebene liegt, durch eine Ebene, so müssen die Producte aus den nicht zusammenstossenden Theilen der Seiten einander gleich sein.

Beweis.

Thes. $Aa \times Bb \times Cc \times Dd = dA \times aB \times bC \times cD$.

Dat. Die Puncte a, b, c und d liegen in einer Ebene.

Legt man durch AD und DC sowohl, als auch durch AB und BC eine Ebene, so werden diese beiden Ebenen die Diagonale AC als Durchschnittslinie haben. Diese soll nun von der anfänglichen Ebene in dem Punkte e geschnitten werden, und die Durchschnitte dieser Ebene mit den durch ABC und ACD gelegten Ebenen sind die Geraden ab und dc. Diese müssen daher [§. 19.] in dem Punkte e der Diagonale AC zusammentreffen.

Man hat also nach §. 24. folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} Aa \times Bb \times Ce &= eA \times aB \times bC, \\ \text{dann } Cc \times Dd \times Ae &= Ce \times dA \times cD \end{aligned}$$

Hieraus wird, wenn man beide Gleichungen durch Multiplication vereinigt, und in beiden Theilen der neuen Gleichung die gleichen Factoren hinweglässt:

$$Aa \times Bb \times Cc \times Dd = aB \times bC \times cD \times dA,$$

was nachzuweisen war. —

§. 26.

Lehrsatz. [Fig. 14.] Sind auf den Seiten eines nicht in einer Ebene liegenden Viereckes vier Punkte so angegeben, dass die Producte aus den nicht aneinander stossenden Theilen der Seiten einander gleich sind, so müssen jene Punkte in einer Ebene liegen.

Beweis.

Thes. a, b, c und d liegen in einer Ebene.

$$\text{Dat. } Aa \times Bb \times Cc \times Dd = aB \times bC \times cD \times dA.$$

Es ist hier nur nachzuweisen, dass die Geraden bc und ad sich schneiden, und diess wird der Fall sein, wenn dieselben in einem Punkte der Diagonale BD zusammentreffen.

Da BD mit bc in der durch BCD und mit ad in der durch ABD gelegten Ebene enthalten ist, so muss diese Gerade BD, sowohl von bc, als auch von ad geschnitten werden. Es geschehe letzteres in e und ersteres in f, so hat man nach §. 24. folgende Beziehungen:

$$aB \times De \times dA = Aa \times Be \times Dd$$

$$bC \times cD \times Bf = Bb \times Cc \times Df.$$

Ferner ist

$$Aa \times Bb \times Cc \times Dd = aB \times bC \times cD \times dA \text{ [nach Dat.]}$$

Vereinigt man diese drei Gleichungen durch Multiplication, und lässt die den beiden Theilen der neuen Gleichung gemeinschaftlichen Factoren weg, so erhält man:

$$De \times Bf = Be \times Df, \text{ oder}$$

$$De \times (BD + Df) = (BD + De) \times Df, \text{ also}$$

$$De = Df,$$

d. h. die Geraden bc und ad treffen in einem Punkte der Diagonale BD zusammen. Dieselben schneiden sich sohin, und mithin liegen die Punkte a, b, c und d in einer Ebene. —

§. 27.

Lehrsatz. Errichtet man in einem Punkte der Durchschnittslinie zweier Ebenen auf diese zwei Senkrechte, von welchen die eine in der einen Ebene, die andere in der zweiten Ebene liegt, so bilden dieselben einen Winkel, welcher sich nicht ändert, so lange die Neigung oder Abweichung beider Ebenen dieselbe bleibt.

Beweis. Es ist hier nur nachzuweisen, dass der

Winkel derselbe bleibt, mag er seinen Scheitel in einem beliebigen Punkte der Durchschnittslinie beider Ebenen haben.

Es sei daher [Fig. 15.] BA die Durchschnittslinie der Ebenen AC und BF, so hat man:

Thes. $\text{bac} = \text{b}_1 \text{a}_1 \text{c}_1$

Dat. ba und $\text{b}_1 \text{a}_1$ senkrecht auf BA in Eb. AC

ac und $\text{a}_1 \text{c}_1$ „ „ „ „ Eb. AE.

Vermöge dieser Voraussetzung ist:

$\left. \begin{array}{l} \text{ab} \# \text{a}_1 \text{b}_1 \\ \text{und ab} \# \text{a}_1 \text{c}_1 \end{array} \right\} [\S. 37. \text{ eb. G.}]$

$\left. \begin{array}{l} \text{daher bac} = \text{b}_1 \text{a}_1 \text{c}_1 \\ \text{und Eb. bac} \# \text{Eb. b}_1 \text{a}_1 \text{c}_1 \end{array} \right\} [\S. 23.]$

Es bleibt sohin der Winkel bac für jeden Punkt der Durchschnittslinie beider Ebenen derselbe.

§. 28.

Lehrsatz. [Fig. 16.] Der Winkel [die Neigung oder Abweichung] zweier Ebenen steht mit dem Winkel zweier Geraden, die in diesen Ebenen liegen, und die Durchschnittslinie der letzteren unter rechten Winkeln schneiden, in einem geraden Verhältnisse.

Beweis.

Thes. Winkel [Eb. AE, Eb. BD]: Winkel [Eb. $\text{A}_1 \text{E}_1$, Eb. $\text{B}_1 \text{D}_1$] = $\text{bac} : \text{b}_1 \text{a}_1 \text{c}_1$ *)

Dat. ba senkrecht auf AB in Eb. AE

bc „ „ „ „ Eb. BD

$\text{b}_1 \text{a}_1$ „ „ $\text{A}_1 \text{B}_1$ „ Eb. $\text{A}_1 \text{E}_1$

$\text{a}_1 \text{c}_1$ „ „ „ „ Eb. $\text{B}_1 \text{D}_1$

Gesetzt die beiden Winkel bac und $\text{b}_1 \text{a}_1 \text{c}_1$ haben ein gemeinschaftliches Mass, nämlich den Winkel α , und zwar sei

*) „Wink. [Eb. AE, Eb. BD]“ bedeutet den Winkel, welchen Ebene AE mit der Ebene BD bildet.

$\text{bac} = m \cdot \alpha$

$b_1 a_1 c_1 = n \cdot \alpha,$

wobei m und n rationale Zahlen sind, so hat man:

$$\text{bac} : b_1 a_1 c_1 = m : n \quad (1.)$$

Trägt man nun das Mass α auf beide Winkel so oft als diess angeht, also m [hier 5] Mal auf bac und n [hier 4] Mal auf $b_1 a_1 c_1$, und legt durch daB , eaB etc, sowie auch durch jede der Theilungslinien des Winkels $b_1 a_1 c_1$ und die Durchschnittslinie $B_1 A_1$ eine Ebene, so wird hiedurch der Winkel zwischen den Ebenen AE und BD in m und der Winkel zwischen den Ebenen $A_1 E_1$ und $B_1 D_1$ in n gleiche Theile, von welchen jeder gleich M sein soll, zerlegt.

Man hat daher
 Wink. [Eb. AE , Eb. BD] : Wink. [Eb. $A_1 E_1$, Eb. $B_1 D_1$]
 $= m : n \quad (2.)$

Vereinigt man die in (2.) gefundene Proportion mit der in (1.), so erhält man:

$$\text{Wink. [Eb. AE, Eb. BD]} : \text{Wink. [Eb. } A_1 E_1, \text{Eb. } B_1 D_1,] = \text{bac} : b_1 a_1 c_1.$$

Ist das Verhältniss $m : n$ nicht rational, so kann man das Mass α so klein annehmen, als nöthig ist, um dem rationalen Verhältnisse so weit, als man nur will, sich zu nähern. —

Zusatz. Nimmt man den Winkel der Ebenen $A_1 E_1$ und $B_1 D_1$ als Mass für den Winkel irgend zweier andern Ebenen an, für den auch $b_1 a_1 c_1$ der Winkleinheit gleich ist, und ist das Mass jenes Neigungswinkels gleich P , so hat man:

$$\text{Wink. [Eb. AE, Eb. BD]} = \text{bac} \times P,$$

d. h. der Winkel zweier Ebenen wird durch

einen Winkel gemessen, den zwei Gerade bilden, von welchen die eine in der ersten, die andere in der zweiten Ebene liegt, und die in einem Punkte der Durchschnittslinie beider Ebenen auf dieser senkrecht stehen. Man nennt daher den Winkel nach den Neigungswinkel beider Ebenen.

§. 29.

Aus den Sätzen des vorigen Paragraphes kann man Folgendes ableiten:

I. Zwei Ebenen stehen auf einander senkrecht, wenn ihr Neigungswinkel ein Rechter ist.

II. Zwei Ebenen sind zu einander parallel [oder bilden eine einzige Ebene, im Falle sie eine Linie gemein haben], wenn ihr Neigungswinkel gleich Null ist.

III. Zwei Ebenen bilden denselben Winkel, wie zwei andere Ebenen, wenn beiderseits die Neigungswinkel gleich sind.

IV. Von den vier Winkeln, welche zwei sich schneidende Ebenen an ihrem Durchschnitt bilden, sind zwei anliegende [Nebenwinkel] zusammen zwei Rechten gleich, zwei entgegengesetzte aber [Scheitelwinkel] sind einander gleich.

V. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten Ebene durchschnitten, so sind unter den hiedurch entstandenen Winkeln die Wechselwinkel sowohl, als auch die correspondirenden Neigungswinkel einander

gleich; zwei äussere oder zwei innere anliegende Winkel aber machen in Summe zwei Rechte aus.

VI. Bilden zwei Ebenen mit einer und derselben dritten sie durchschneidenden Ebene gleiche Winkel, so sind dieselben parallel.

§. 30.

Lehrsatz. [Fig. 17.] Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, und man legt durch dieselbe eine beliebige Ebene, so wird letztere ebenfalls auf jener Ebene senkrecht stehen.

Beweis.

Thes. Eb. PQ senkrecht auf Eb. MN.

Dat. AB senkrecht auf Eb. MN, ferner AB in Eb. PQ.

Es ist nur nachzuweisen, dass der Neigungswinkel der Ebenen PQ und MN einem Rechten gleich ist [§. 29. I.].

Ist nun PR die Durchschnittslinie beider Ebenen, so ziehe man vom Fusspunkte B der auf Eb. MN senkrechten Geraden AB in Eb. MN auf PR die Senkrechte BC, so ist ABC der Neigungswinkel beider Ebenen [§. 28. Zus.], denn $\angle ABR = R$ [§. 5. Zus. I.] und AB liegt in Eb. PQ [Dat.]. Nun ist

$$\angle ABC = R \text{ [Dat.]}$$

folglich steht Eb. PQ senkrecht auf Eb. MN [§. 29. I.]. —

§. 31.

Lehrsatz. [Fig. 17.]. Steht eine Ebene senkrecht auf einer andern, und man zieht von einem be-

liebigen Punkte der einen Ebene eine Gerade senkrecht auf die Durchschnittslinie beider Ebenen, so muss diese Gerade auch auf der zweiten Ebene senkrecht stehen.

Beweis.

Thes. AB senkrecht auf Eb. MN.

Dat. Eb. PQ senkrecht auf Eb. MN;

ABP = R, wobei A in Eb. PQ und PR die Durchschnittslinie der Ebenen PQ und MN ist.

Da A und B in Eb. PQ liegen, so muss auch die Gerade AB ganz und gar in diese Ebene fallen [§. 2. Nro. 3.]. Zieht man nun BC senkrecht auf PR in Eb. MN, so ist

ABC = R als Neigungswinkel beider Ebenen [§. 29. I.]

Es ist aber auch $\underline{ABP = R}$ [Dat.],

daher AB senkrecht auf Eb. MN [§. 5.]

Zusatz I. Zieht man vom Punkte A der Eb. PQ auf Eb. MN die Senkrechte AB, so muss diese in Eb. PQ liegen. Denn fiel sie nicht in Eb. PQ, so könnte man von A aus jedenfalls eine Gerade AD in Eb. PQ senkrecht auf die Durchschnittslinie PR ziehen, und diese müsste, dem Lehrsätze gemäss, auch auf Eb. MN senkrecht stehen. Man hätte also von A aus auf Eb. MN zwei Senkrechte, was nach §. 5. Zus. II. unmöglich ist. Es muss daher die Gerade AB in Eb. PQ liegen; d. h. wenn eine Ebene auf einer andern senkrecht steht, und man zieht von einem beliebigen Punkte der ersten Ebene auf die zweite eine Senkrechte, so muss letztere ganz und gar in die erste Ebene fallen.

Zusatz II. Durch einen Punct kann man auf eine Ebene beliebig viele andere Ebenen senkrecht legen.

Zusatz III. Durch eine Gerade kann man nur eine Ebene legen, die auf einer anderen Ebene senkrecht steht.

Zusatz IV. Alle Geraden, welche von beliebigen Puncten einer geraden Linie auf eine Ebene senkrecht gezogen werden können, liegen in einer Ebene.

§. 32.

Lehrsatz. Legt man durch jede von zwei parallelen Geraden eine Ebene senkrecht auf eine gegebene Ebene, so müssen diese beiden Ebenen unter sich parallel sein.

Beweis. Sind nämlich L_1 und L_2 diese Geraden und E eine gegebene Ebene, und man zieht von einem beliebigen Puncte der L_1 eine Senkrechte P_1 auf E , sodann von einem Puncte der L_2 eine Senkrechte P_2 auf E , legt sodann durch L_1 und P_1 die Ebene E_1 , dann durch L_2 und P_2 die Ebene E_2 , so muss

$$\left. \begin{array}{l} E_1 \text{ senkrecht auf } E \\ \text{und } E_2 \quad \quad \quad \text{„} \quad \quad \text{„ } E \end{array} \right\} [\S. 30.]$$

Nun ist aber $L_1 \parallel L_2$ (Dat.)

dann $P_1 \parallel P_2$ (§. 11.)

daher $E_1 \parallel E_2$ (§. 23.)

§. 33.

Lehrsatz. [Fig. 18.] Stehen zwei Ebenen auf einer dritten Ebene senkrecht, so muss auch ihre

Durchschnittslinie auf dieser Ebene senkrecht stehen. —

Beweis.

Thes. AB senkrecht auf Eb. MN

Dat. AB in Eb. PQ und in Eb. RS, ferner

Eb. PQ senkrecht auf Eb. MN und

Eb. RS senkrecht auf Eb. MN.

Da die von einem beliebigen Punkte der Durchschnittslinie beider Ebenen auf die Eb. MN gezogene Senkrechte sowohl in Eb. PQ, als auch in Eb. RS [§. 31. Zus. I.] liegen muss, so muss auch diese Senkrechte mit der Durchschnittslinie beider Ebenen zusammenfallen, und es ist also AB senkrecht auf Eb. MN.

Zusatz I. Stehen drei Gerade senkrecht auf einander, und man legt durch je zwei derselben eine Ebene, so steht jede dieser Geraden auf der Ebene der beiden andern und jede dieser Ebenen auch auf den beiden andern Ebenen senkrecht [§. 30.].

Zusatz II. Stehen drei Ebenen auf einander senkrecht, so müssen auch ihre Durchschnittslinien auf einander senkrecht stehen.

§. 34.

Lehrsatz. [Fig. 19.]. Zwei Gerade, die sich nicht schneiden und auch nicht parallel sind, kann man durch eine Gerade schneiden, welche durch einen gegebenen Punct geht.

Beweis. Sind AB und CD zwei über einander gehende Gerade, und ist M ein beliebiger Punct, so

denke man sich durch M und AB sowohl, als auch durch M und CD eine Ebene gelegt, so müssen sich diese beiden Ebenen schneiden. Ihre Durchschnitts-
linie liegt aber mit AB in der ersten und mit CD in der zweiten Ebene, und muss daher dieselben schneiden; sie ist also jene Gerade, welche durch M geht und die beiden gegebenen Geraden schneidet.

I. Zusatz. Drei Gerade, die weder parallel sind, noch sich schneiden, kann man durch eine und dieselbe vierte Gerade schneiden.

II. Zusatz. Zwei über einander gehende Gerade kann man durch eine Ebene schneiden, die parallel zu einer gegebenen Ebene ist.

§. 35.

Lehrsatz. [Fig. 20.]. Für zwei Gerade, durch welche man keine Ebene legen kann, gibt es eine Gerade, welche auf beiden zugleich senkrecht steht, und die ihre kürzeste Entfernung angibt.

Beweis. AB und CD seien diese zwei Geraden, durch welche eine Ebene nicht gelegt werden kann. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt E der Geraden CD die Linie $FG \perp AB$, und lege durch CD und FG die Ebene MN , so muss diese [§. 14.] auch parallel zur Geraden AB sein. Es ist sohin auch AB von Ebene MN überall gleich weit entfernt [§. 15.]. Zieht man nun von einem beliebigen Punkte der Geraden AB auf Ebene MN eine Senkrechte LH , und vom Fusse der letzteren eine Parallele HC zu AB , so wird diese die Gerade CD schneiden, was in C geschehen

soll. Wenn man nun durch C eine Senkrechte CK auf Ebene MN fällt, so muss diese [§. 31. Zus. I.] in der durch AB und CH gelegten Ebene sich befinden, auf CH [§. 5. Zus. I.] senkrecht stehen, und mithin auch [§. 36. Zus. I. eb. G.] auf AB senkrecht sein.

Da nun KC auf Ebene MN senkrecht steht, so ist sie auch auf CD senkrecht, und mithin gibt dieselbe — weil sie auf AB und CD zugleich senkrecht ist — den kürzesten Abstand dieser beiden Geraden an. —

§. 36.

Lehrsatz. Stehen zwei Ebenen auf einander senkrecht, und werden von einer dritten senkrechten Ebene durchschnitten, so müssen die Durchschnittslinien senkrecht auf der Durchschnittslinie jener beiden Ebenen stehen.

Beweis. Nach §. 33. muss die Durchschnittslinie jener zwei Ebenen senkrecht auf der dritten Ebene stehen, folglich steht dieselbe auch [§ 5. Zus. I.] senkrecht auf jeder Geraden, die durch ihren Fuss geht, und in dieser dritten Ebene liegt. Dieselbe ist mithin senkrecht auf den zwei Geraden, nach welchen die gegebenen Ebenen von der dritten senkrecht durchschnitten werden.

Zusatz. Zieht man von einem Punkte aus auf zwei Ebenen, die auf einander senkrecht stehen, senkrechte Gerade, so muss, wenn die eine der beiden Ebenen in die Erweiterung der anderen gelegt wird, die Verbindungslinie der Fusspunkte jener Senkrechten auf der Durchschnittslinie beider Ebenen senkrecht stehen.

§. 37.

Lehrsatz. [Fig. 21.] Zieht man von einem beliebigen Punkte zwischen zwei sich schneidenden Ebenen auf jede der letzteren eine Senkrechte, so bilden diese beiden Geraden einen Winkel, welcher den Neigungswinkel beider Ebenen zu zwei Rechten ergänzt.

Beweis. Es seien BC und BD die beiden gegebenen Ebenen, welche sich nach der Geraden AB schneiden, M sei ein zwischen denselben liegender Punkt, von dem aus auf Ebene BC die Gerade ME und auf Ebene BD die Gerade MG senkrecht gezogen ist. Man soll nun nachweisen, dass $EMG = 180^\circ - \alpha$, wenn α der Neigungswinkel beider Ebenen ist. Legt man durch EMG eine Ebene, so muss diese [§. 30.] senkrecht auf beiden gegebenen Ebenen stehen, und sohin ist dieselbe auch [§. 33.] senkrecht auf der Geraden AB.

Wenn daher E und G die Fusspunkte beider Senkrechten sind und F der Durchschnittspunkt der Ebene EMG mit AB ist, so muss [§. 5. Zus. I.]:

$$EFB = BFG = R$$

sein, sohin ist EFG der Neigungswinkel der beiden gegebenen Ebenen [§. 28. Zus.].

Dieser Winkel liegt aber in dem Vierecke MEFG, in welchem

$$MEF = MGF = R$$

ist, sohin ist

$$EMG + EFG = 2R.$$

$$\text{oder } EMG + \alpha = 180^\circ$$

Anmerkung. Zieht man daher von einem belie-

bigen Punkte aus auf zwei sich schneidende Ebenen senkrechte Gerade, und misst den Winkel, den diese bilden, sucht sodann hiezu den Supplementswinkel, so wird dieser dem Neigungswinkel beider Ebenen gleich sein. —

§. 38.

Nachdem nun die Eigenschaften bezüglich der Geraden und Ebenen vorgeführt wurden, so soll noch Einiges über die Darstellungsmethoden in möglichster Kürze in Betracht gezogen werden.

I. Die geometrische Darstellung der geometrischen Grössen hat den Zweck, die gegenseitige Lage derselben im Raume, ihre Formen und Massverhältnisse geometrisch zu entwerfen. — Hiezu wählt man gewöhnlich zwei auf einander senkrecht stehende Ebenen, von denen die eine horizontale, die andere vertikale Projectionsebene oder Tafel genannt wird. Ihre Durchschnittslinie heisst *Projectionsaxe* oder *Axe*.

Zuweilen wird es nothwendig, ausser diesen beiden Tafeln noch eine dritte, auf dieser senkrechten Ebene anzunehmen, um auch auf dieser die Grössen darzustellen. — In manchen Fällen erheischt es die Nothwendigkeit, die Tafeln unter schiefen Winkeln anzunehmen; die im Folgenden vorgenommenen Betrachtungen aber beziehen sich nur auf die orthogonalen Projectionen. —

II. Denkt man sich von einem beliebigen Punkte im Raume auf eine der Projectionsebenen eine Senkrechte, so wird der Fuss der letzteren die Projection des

Punctes auf dieser Ebene, die Senkrechte selbst die projicirende Linie genannt. Die Projectionen werden nach den Tafeln benannt, in welchen sie liegen, und zwar horizontale und vertikale Projection des Punctes. — Kennt man zwei Projectionen eines Punctes, so kann man die Lage desselben im Raume wieder angeben. Aus der Länge der projicirenden Linien kann man die Entfernungen des Punctes von den Projectionstafeln erkennen.

III. Legt man durch eine Gerade eine Ebene, welche senkrecht auf einer der Projectionstafeln steht, so wird der Durchschnitt dieser beiden Ebenen die Projection der Geraden auf dieser Tafel genannt. Dieselbe Projection erhält man auch, wenn man zwei Puncte der Geraden projicirt, und ihre Projectionen durch eine Gerade verbindet; denn es geht aus §. 31. Zus. I. hervor, dass wenn ein Punct auf einer Geraden sich befindet, seine Projection auf der gleichnamigen Projection der Geraden liegen muss.

Aus der Horizontal- und Vertikalprojection einer Geraden ist ihre Lage, und durch die Projectionen ihrer Endpuncte ist auch ihre Länge bestimmt. — [Aus der Darstellungsweise einer Geraden kann man sogleich ansehen, wie eine geradlinige Figur projicirt wird.]

Eine krumme Linie kann man dadurch darstellen, dass man von ihr so viele Puncte, als zur Bestimmung ihrer Krümmung nöthig sind, projicirt, und die Projectionen derselben durch eine stetige Linie in gegebener Ordnung verbindet. — Durch zwei Projectionen ist diese Linie bestimmt.

IV. Eine Ebene wird nicht durch Punkte dargestellt. Hiezu wählt man nur zwei Gerade, die in der Ebene liegen, und denkt sich zu dem Ende dieselbe verlängert, bis sie die Projectionstafeln schneidet. Die Geraden, nach welchen diess geschieht, treffen, im Falle die Ebene mit der Projectionaxe nicht parallel ist, in einem Punkte der letzteren zusammen [§. 19.], und bestimmen die Lage der Ebene ganz und gar. Diese Geraden heissen die Spuren der Ebene, und zwar die eine vertikale, und die andere horizontale Spur.

Ist eine Ebene zur Projectionaxe parallel, so sind es auch ihre Spuren [§. 19.].

Steht eine Ebene senkrecht auf der horizontalen Tafel, so muss ihre vertikale Spur auf der letzteren senkrecht sein [§. 33.], und wenn eine Ebene auf der vertikalen Tafel senkrecht steht, so steht ihre horizontale Spur ebenfalls auf der letzteren senkrecht [§. 33.]. Durch ihre beiden Spuren ist eine Ebene der Lage nach vollkommen bestimmt.

V. Denkt man sich durch einen Punkt und seine Projectionen eine Ebene gelegt, so werden die Spuren derselben senkrecht auf der Projectionaxe stehen [§. 33.]. Wenn man sich nun beide Tafeln aufgeklappt denkt, so bilden diese Spuren eine Gerade, welche auf der Projectionaxe senkrecht steht. — Die Senkrechte, welche von der vertikalen Projection des Punktes auf die Axe gezogen wird, gibt die Entfernung des Punktes im Raume von der horizontalen, und die von der horizontalen Projection des Punktes auf die Axe gezogene Senkrechte, gibt die Entfernung des Punktes von der vertikalen Tafel an.

VI. Schneiden sich zwei Gerade im Raume, so müssen sich sowohl ihre horizontalen, als auch ihre vertikalen Projectionen schneiden, und zwar müssen die Projectionen des Durchschnittspunctes in den Spuren der durch letzteren Punct auf die Axe senkrecht gezogenen Ebene liegen [V.]. — Liegen beide Gerade in einer auf einer Tafel senkrechten Ebene, so werden die Projectionen in dieser Tafel durch eine einzige Gerade dargestellt werden.

Sind zwei Gerade parallel zu einander, so müssen auch ihre gleichnamigen Projectionen parallel sein. Betrachtet man z. B. ihre horizontalen Projectionen, so müssen diese als Durchschnittslinien zweier parallelen Ebenen [§. 32.] — ihrer horizontal projicirenden Ebenen nämlich — parallel sein [§. 18.], und ebenso auch ihre vertikalen Projectionen.

VII. Sind zwei Ebenen unter sich parallel, so müssen auch ihre gleichnamigen Spuren unter sich parallel sein. [§. 18.].

VIII. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so muss die horizontale Projection der Geraden senkrecht auf der horizontalen Spur und die vertikale Projection derselben senkrecht auf der vertikalen Spur der Ebene sein. Denn die projicirende Ebene der Geraden steht senkrecht auf der Spur der Ebene [§. 33.], folglich ist auch letztere [§. 5. Zus. I.] auf der Projection der Geraden senkrecht.

IX. Steht eine Gerade auf einer Tafel senkrecht, so ist ihre Projection in der letzteren ein Punct. — Liegt eine Gerade zu einer der Tafeln parallel, so gibt ihre Projection in dieser Tafel zugleich ihre wahre Lage, und wenn sie begränzt ist, auch ihre Länge an;

ihre Projection in der andern Tafel aber ist zur Projectionsaxe parallel. — Liegt eine Gerade in einer auf der Projectionsaxe senkrechten Ebene, so müssen ihre Projectionen in eine auf dieser Axe senkrechten Geraden zu liegen kommen, wenn die eine der Tafeln in die erweiterte Ebene der anderen zu liegen kömmt. —

II. Abschnitt.

Von den körperlichen Winkeln.

§. 39.

Erklärungen. 1) Jeder von zwei Ebenen an ihrer Durchschnittslinie gebildete Winkel soll im Folgenden mit dem Namen **Flächenwinkel** bezeichnet werden, zum Unterschiede von dem aus zwei Geraden gebildeten Winkel, welcher **Linienwinkel** heissen soll. —

2) Ein von einer oder mehreren Flächen eingeschlossener Raum wird **körperlicher Raum** genannt.

Ist ein körperlicher Raum von Ebenen begrenzt, so gehören wenigstens drei Ebenen dazu, um den körperlichen Raum zu umschliessen; es sind aber deren wenigstens vier nöthig, um einen körperlichen Raum ganz und gar, von allen Seiten nämlich, einzuschliessen. Ein von allen Seiten eingeschlossener körperlicher Raum, wird ein **geometrischer Körper** genannt.

3) Stossen drei oder mehr Ebenen in einem Punkte zusammen, so bilden ihre Durchschnittslinien Winkel, und diese bilden mit den Flächenwinkeln einen körperlichen Winkel, oder ein körperliches Eck.

Jene Linienwinkel, unter welchen die Durchschnittslinien der zusammenstossenden Ebenen geneigt sind, nennt man die Seiten, die von den Ebenen dieser Seiten gebildeten Flächenwinkel aber werden die Winkel des körperlichen Eckes genannt.

Nach der Anzahl der Linienwinkel, welche ein körperliches Eck bilden, wird letzteres benannt, und zwar ein drei-, vierseitiges etc., je nachdem jene Zahl 3, 4 etc. ist. —

§. 40.

Lehrsatz. [Fig. 22.] In einem jeden dreiseitigen körperlichen Ecke ist die Summe je zweier Seiten grösser als die dritte.

Beweis. Sind die drei Seiten einander gleich, so ist jedenfalls die Summe zweier, grösser als die dritte. Es ist also hier nur der Fall vorzunehmen, in welchem die drei Seiten ungleich sind, also eine Seite grösser ist, als jede der beiden anderen. Wenn also $ABC \triangleright ABD$ und $ABC \triangleright DBC$, so hat man

Thes. $ABD + DBC \triangleright ABC$

Da $ABC \triangleright ABD$ ist, so kann man von ABC einen Theil hinwegnehmen, der so gross als ABD ist. Es sei daher

1) $ABE = ABD$.

Macht man nun BD beliebig lang, und hierauf

$BE = BD$,

zieht AE, verlängert diese bis zum Durchschnitte C mit BC, und verbindet A mit D, und D mit C durch Gerade, hat man

$\triangle ABE \cong \triangle ABD$ [§. 20. eb. G.]

also $AE = AD$ [§. 20. Zus. II. eb. G.]

Nun ist

$AE + EC < AD + DC$ [§. 17. eb. G.]

oder $AD + EC < AD + DC$, folglich

2) $EC < DC$.

Nun ist noch zu zeigen, dass $EBC < DBC$. Es kann vor Allem EBC nicht gleich DBC sein, indem sonst auch

$EC = DC$ wäre,

was gegen (2.) spricht.

Wäre nun $EBC > DBC$, so müsste, wenn man $\triangle DBC$ um BC so weit dreht, bis dasselbe in die Ebene des $\triangle EBC$ fällt, BD zwischen BE und BC zu liegen kommen, und der Punct D wird entweder innerhalb des $\triangle BEC$ [wie in Fig. 23. a.], oder in die Seite EC [Fig. 23. b.], oder ausserhalb des $\triangle EBC$ [Fig. 23. c.] fallen.

Im ersten Falle hätte man [Fig. 23. a.], wenn BD bis zum Durchschnitte F mit EC verlängert wird:

$BE + EF + DF + FC > BD + DF + DC$
[§. 17. eb. G.]

oder mit Berücksichtigung der Daten:

$EC > DC$,

was aber gegen die Annahme $DC > EC$ ist, also kann in diesem Falle, und ebensowenig im zweiten Falle $EBC > DBC$ sein.

Im dritten Falle hätte man [Fig. 23. c.]:

$$BF + EF + FD + FC > BE + DC \text{ [§. 17. eb. G.]}$$

oder

$$EC > DC,$$

was wieder unmöglich ist, denn man hat [nach 2.] $CE < DC$, folglich kann [Fig. 23.], EBC nicht grösser als DBC sein.

Da also EDC weder gleich Winkel DBC, noch grösser sein kann als dieser, so muss

$$EBC < DBC \text{ sein.}$$

Nun ist aber $ABE = ABD$ [Constr.]

$$\text{also } EBC + ABE < DBC + ABD$$

$$\text{oder } ABC < DBC + ABD,$$

was nachzuweisen war. —

§. 41.

Lehrsatz. [Fig. 24.] Die Summe der Seiten eines körperlichen Eckes ist kleiner als vier Rechte.*)

Beweis.

$$\text{Thes. } \angle AND + \angle DNC + \angle CNB + \angle ANB < 4 R$$

Dat. $\angle AND, \angle DNC, \angle CNB$ und $\angle BNA$

bilden bei N einen körperlichen Winkel.

Man durchschneide alle Seiten des körperlichen Eckes durch eine Ebene, so erhält man das ebene Vieleck ABCD. In diesem nehme man den Punct M beliebig an, und ziehe nach allen Scheiteln des Vieleckes Gerade, also die Geraden MA, MB, MC und MD.

Nun ist vor Allem die Summe der Winkel in den

*) Es ist hier wie in allen folgenden Sätzen nur von convexen Winkeln, nie von einspringenden Körperwinkeln und ebenso wenig von concaven Flächenwinkeln die Rede. —

um M liegenden Dreiecken MAB, MBC, MCD und MDA so gross, als die Summe der Winkel in den um N liegenden Dreiecken NAD, NDC, NBC und NAB.

Es ist aber $NAB + NAD > BAD$
 $NBA + NBC > ABC$
 $NCB + NCD > BCD$
 und $NDA + NDC > ADC$ } [§. 40.]

folglich ist auch in den bei N zusammenstossenden Dreiecken die Summe der Winkel an ihren Grundlinien grösser [als $BAD + ABC + BCD + CDA$] als die Summe der Winkel an den Grundlinien in den Dreiecken, welche um M herum liegen. Soin ist die Summe der Winkel um den Punct M im Vielecke ABCD grösser als die Summe der Seiten, welche das körperliche Eck bilden. Es ist aber die Summe jener Winkel [um M herum] gleich $4 R$ [§. 10. Zus. II. eb. G.], also ist um so mehr die Summe der Seiten des gegebenen körperlichen Eckes kleiner als vier Rechte. —

§. 42.

Lehrsatz. Nimmt man innerhalb eines dreiseitigen körperlichen Eckes einen beliebigen Punct an, und zieht von diesem auf die drei Seiten senkrechte Gerade, so bilden diese ein körperliches Eck, dessen Seiten die Supplemente der Winkel des gegebenen Eckes, und dessen Winkel die Supplemente der Seiten sind.

Beweis. Nach §. 37. ist jede Seite dieses neuen Eckes gleich 180° weniger dem Flächenwinkel, den die Ebenen bilden, auf welchen die Schenkel dieser Seite senkrecht stehen.

Ferner steht jede Seite des neuen körperlichen Eckes senkrecht auf zwei Seiten des gegebenen, daher

steht die Durchschnittslinie der letzteren auf jener Seite des neuen Eckes senkrecht [§. 33.]. Es stehen also die Schenkel der Seiten des gegebenen Eckes einzeln senkrecht auf den Seiten des neuen Eckes, und bilden mithin [§. 37.] in ihrem Scheitel die Supplementswinkel zu den Winkeln des neuen Eckes. Also sind die Winkel des letzteren die Supplemente der Seiten des gegebenen.

Dieses neue dreiseitige Eck, dessen Seiten senkrecht auf den Seiten des gegebenen stehen, und welches mithin die so eben erörterten Eigenschaften besitzt, nennt man das Supplementardreieck des gegebenen. —

Zusatz. Aus den Seiten eines dreiseitigen körperlichen Eckes kann man die Winkel eines Supplementareckes, und aus den Winkeln des ersteren die Seiten des letzteren finden, und umgekehrt. —

§. 43.

Lehrsatz. In einem jeden dreiseitigen körperlichen Eck ist die Summe aller Winkel kleiner als sechs und grösser als zwei Rechte.

Beweis. Man denke sich zu diesem Eck das Supplementareck, und es seien die Seiten letzteren einzeln genommen a, b, c , während die Winkel des ersteren A, B und C sein sollen.

Es ist sodann

$$A + B + C = 6R - (a + b + c)$$

folglich ist 1) $A + B + C < 6R$.

Nun muss aber

$$a + b + c < 4R \text{ sein [§. 41.],}$$

daher $A + B + C = 6R - (a + b + c)$, wobei

$$a + b + c < 4R$$

also 2) $A + B + C > 2R$

Zusatz I. Aus zwei Winkeln eines körperlichen Dreieckes kann man den dritten nicht finden, da die Summe dieser drei Winkel innerhalb der Grenzen $2R$ und $6R$ jeden beliebigen Werth annehmen kann. — Es ist also auch die Summe der Winkel eines dreiseitigen Eckes der Summe der Winkel eines zweiten nicht nothwendig gleich.

Zusatz II. Jeder Winkel eines dreiseitigen körperlichen Eckes kann ein Rechter, oder auch ein stumpfer sein. Es kann also ein körperliches Dreieck zweirechtwinklig und auch dreirechtwinklig sein. —

§. 44.

Erklärungen. 1). Sind in einem körperlichen Dreiecke zwei Seiten einander gleich, so nennt man man dasselbe gleichschenkelig. Sind die drei Seiten unter sich gleich, so wird das körperliche Dreieck ein gleichseitiges genannt. —

2) Haben zwei körperliche Dreiecke einzeln genommen, sowohl die Seiten als auch die Winkel einander gleich, und liegen zugleich die Seiten des einen in derselben Ordnung wie die Seiten des andern, so sind beide Dreiecke vollkommen gleich, und können so in einander gelegt werden, dass sie sich decken.

Sind die Seiten und Winkel eines körperlichen Dreieckes, einzeln den Seiten und Winkeln eines zweiten gleich, ohne dass dieselben in einerlei Ordnung auf

einander folgen, so sind beide Ecke symmetrisch gleich. — Dieselben Erklärungen gehören auch für körperliche Vielecke, nämlich für Körperwinkel, welche aus mehr als drei Linienwinkeln gebildet sind.

§. 45.

Lehrsatz. [Fig. 25.] Sind die drei Seiten eines körperlichen Dreieckes, einzeln den drei Seiten eines zweiten gleich, so sind auch die Winkel des einen, einzeln den Winkeln des anderen Eckes gleich.

Beweis.

Thes. Winkel [Eb. BSA, Eb. BSC] =

= Winkel [Eb. bsa, Eb. bsc] (*)

Winkel [Eb. ASC, Eb. BSC] =

= Winkel [Eb. asc, Eb. bsc]

Winkel [Eb. BSA, Eb. ASC] =

= Winkel [Eb. bsa, Eb. asc]

Dat. $BSA = bsa$; $ASC = asc$; $BSC = bsc$

Man mache $SA = sa$, nehme aber vorher sa beliebig lang, ziehe von A und a beziehungsweise auf die Ebenen BSC und bsc die Senkrechten AM und am , von M auf SB und SC , und hierauf von m auf sb und sc die Perpendikel MB , MC , dann mb und mc , und ziehe AB , AC , dann ab und ac .

Es ist nun vor Allem

$ABS = abs = R$, dann $ACS = acs = R$ [§. 9.],
u. da (n. Constr.)

(*) Der Winkel den eine Ebene M mit einer zweiten Ebene P bildet, wird im Folgenden wieder durch „Winkel [Eb. M , Eb. P]“ bezeichnet.

MBS = mbs = R, dann MCS = mcs = R, so sind die Winkel ABM und ACM, dann abm und acm beziehungsweise die Neigungswinkel der Ebenen ASB und BSC, dann ASC und BSC, asb und bsc, und für asc und bsc [§. 28. Zus.], vorausgesetzt, dass AM in Beziehung auf SB dieselbe Lage hat, wie SC. —

Da nun ASB = asb [Dat.]

AS = AS

und SBA = sba = R [§. 9.]

so muss $\triangle ASB \cong \triangle asb$ [§. 32. eb. G.]

und sohin AB = ab

und SB = sb

} [§. 20. Zus. II. eb. G.]

sein. Ebenso ist wegen

AS = as

ASC = asc [Dat.]

und SCA = sca = R

$\triangle ASC \cong \triangle asc$ und daher

AC = ac

und SC = sc.

Wegen SB = sb

BSC = bsc

SC = sc

MBS = mbs = R

und MCS = mcs = R

ist auch Viereck SBMC = Viereck sbmc (*)

und daher BM = bm

und CM = cm

(*) Was klar wird, wenn beide Vierecke gehörig auf einander gelegt werden. —

Da also $AB = ab$

$AC = ac$

$BM = bm$

$CM = cm$

$AMB = amb = R$ und

$AMC = amc = R,$

so muss $\triangle AMB \cong \triangle amb$ und

$\triangle AMC \cong \triangle amc$ [§. 31. eb. G.],

daher $ABM = abm$ und

$ACM = acm$, d. h.

Wink. [Eb. ABS, Eb. BSC] = Wink. [Eb. abs, Eb. bsc]

Wink. [Eb. ASC, Eb. BSC] = Wink. [Eb. asc, Eb. bsc].

Es ist noch zu zeigen, dass Wink. [Eb. ASB, Eb. ASC] = Wink. [Eb. asb, Eb. asc]. Zu dem Ende lege man von A aus auf SA, und von a aus auf sa eine Ebene senkrecht; jene durchschneidet die drei Seiten des Eckes S nach den Geraden, AD, AE und DE, diese die Seiten des Eckes s nach den Geraden ad, ae und de.

Da nun DAE dem Neigungswinkel der Ebenen ASB und ASC und dae der Neigungswinkel der Ebenen asb und asc ist, so ist nur die Gleichheit der Winkel DAE und dae nachzuweisen. Nun ist

$\triangle ASE \cong \triangle ase$ [§. 32. eb. G.]

also $SE = se$

und $AE = ae$; ferner

$\triangle ADS \cong \triangle ads$ [§. 32. eb. G.]

also $SD = sd$

und $AD = ad$,

und daher auch $\triangle DSE \cong \triangle dse$ [§. 20.]

also $DE = de$

Ausserdem war $AD = ad$

und $AE = ae$

daher $\triangle ADE \cong \triangle ade$ [§. 22. eb. G.]

und $DAE = dae$, oder

Wink. [Eb. ASB, Eb. ASC] = Wink. [Eb. asb, Eb. asc],
w. z. b. w.

Zusatz I. Liegen die Perpendikel AM und am nach einer und derselben Gegend hin, so kann man die körperlichen Dreiecke so in einander legen, dass sie sich decken, es folgen nämlich sodann auch ihre Seiten nach ein und derselben Ordnung, und die körperlichen Dreiecke sind sodann congruent, wenn die drei Seiten des einen, den drei Seiten des andern gleich sind.

Zusatz II. Sind die drei Seiten eines körperlichen Eckes einzeln gleich den drei Seiten eines zweiten, und man macht zwei entsprechende Durchschnittslinien zweier Seiten in beiden Ecken einander gleich, und zieht von dem Endpunkte dieser Linie auf die dritte Seite in jedem der beiden Ecken ein Perpendikel, so müssen diese beiden Perpendikel einander gleich sein. —

§. 46.

Lehrsatz. Sind zwei Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel eines körperlichen Dreieckes einzeln gleich zweien Seiten und dem hievon eingeschlossenen Winkel eines zweiten, so müssen auch die

übrigen Bestimmungsstücke des einen den übrigen Bestimmungsstücken des andern einzeln gleich sein.

Beweis. [Fig. 25.] Man mache dieselben Constructionen wie im vorigen Paragraphen, so hat man:

$$\text{Thes. } BSC = bsc$$

$$ABM = abm$$

$$\text{und } ACM = acm$$

$$\text{Dat. } ASB = asb$$

$$ASC = asc$$

$$\text{und } DAE = dae$$

Vor Allem ist wieder, aus den im vorigen Paragraphen angegebenen Gründen:

$$SB = sb$$

$$SC = sc$$

$$MBS = mbs = R$$

$$\text{und } MCS = mcs = R$$

$$\text{ferner auch } BA = ba, \text{ und } CA = ca$$

Es ist aber auch, wie im vorigen Paragraphen:

$$SD = sd, \text{ und } SE = se$$

$$\text{dann } AD = ad, \text{ und } AE = ae$$

also auch wieder

$\triangle ADE \cong \triangle ade$ und $DE = de$; daher $\triangle SDE \cong \triangle sde$ und $DSE = dse$. Es ist also auch [§. 45.] $BM = bm$ und $CM = cm$, mithin $\triangle ABM \cong \triangle abm$, $\triangle ACM \cong \triangle acm$ und daher $ABM = abm$ und $ACM = acm$, w. z. b. w. —

Zusatz. Sind in zwei körperlichen Dreiecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel einzeln gleich, und folgen in beiden Ecken in einerlei Ordnung, so sind auch diese Dreiecke congruent.

§. 47.

Lehrsatz. Sind eine Seite und die anliegenden Winkel eines körperlichen Dreieckes einzeln so gross als in einem andern, so müssen auch die übrigen Bestimmungsstücke des einen, denen des andern Dreieckes einzeln gleich sein.

Beweis. Man denke sich zu jedem dieser Dreiecke das Supplementardreieck, so haben beide Supplementardreiecke, der im Lehrsatze gemachten Voraussetzung zufolge, zwei Seiten und den davon eingeschlossenen Winkel einzeln gleich, folglich müssen dieselben auch nach §. 46. die dritte Seite und die beiden anderen Winkel gleich haben. Diese Stücke sind aber die Supplemente der Bestimmungsstücke in den gegebenen Dreiecken, von welchen die Gleichheit nachgewiesen werden soll; es müssen somit die beiden übrigen Seiten und der hievon eingeschlossene Winkel in einem Dreiecke so gross sein, als im anderen.

§. 48.

Lehrsatz. Sind die drei Winkel eines körperlichen Dreieckes einzeln so gross, als die eines zweiten, so müssen auch die Seiten des einen, so gross, als die des anderen sein.

Beweis. Es seien die Winkel der gegebenen Dreiecke

W_1 und w_1 , W_2 und w_2 , W_3 und w_3 , die Seiten derselben aber S_1 und s_1 , S_2 und s_2 , S_3 und s_3 , so hat man

Thes. $S_1 = s_1$; $S_2 = s_2$ und $S_3 = s_3$

Dat. $W_1 = w_1$; $W_2 = w_2$ und $W_3 = w_3$.

Man denke sich zu diesen Dreiecken die Supplementardreiecke $\triangle$ und δ , so sind die Winkel in $\triangle$ folgende: $180 - S_1$, $180 - S_2$ und $180 - S_3$, die Seiten dieses Dreieckes sind: $180 - W_1$, $180 - W_2$ und $180 - W_3$; ebenso die Winkel in δ : $180 - s_1$, $180 - s_2$ und $180 - s_3$, die Seiten aber: $180 - w_1$, $180 - w_2$ und $180 - w_3$. Da nun

$$\begin{aligned} W_1 &= w_1 \text{ so ist auch } 180 - W_1 = 180 - w_1 \\ W_2 &= w_2 \text{ „ „ „ } 180 - W_2 = 180 - w_2 \\ W_3 &= w_3 \text{ „ „ „ } 180 - W_3 = 180 - w_3 \end{aligned}$$

Sohin hat man nach §. 45.:

$$\begin{aligned} 180 - S_1 &= 180 - s_1, \text{ also auch } S_1 = s_1 \\ 180 - S_2 &= 180 - s_2, \text{ „ „ } S_2 = s_2 \\ \text{und } 180 - S_3 &= 180 - s_3, \text{ „ „ } S_3 = s_3. \end{aligned}$$

§. 49.

Lehrsatz. Sind in einem körperlichen Dreiecke zwei Seiten einander gleich, so müssen auch die an der dritten Seite liegenden Winkel einander gleich sein.

Beweis. Man lege durch die Durchschnittslinie C der beiden einander gleichen Seiten S_1 und S_2 eine Ebene, welche den Winkel W_3 dieser beiden Seiten halbirt, und es schneide diese Ebene die dritte Seite nach der Linie D, so wird diese Seite in zwei Theile hiedurch zerlegt, welche α und β sein sollen, und zwar soll α an S_1 und β an S_2 liegen.

Es bilden nun die Seiten α , S_1 und der von C und D eingeschlossene Linienwinkel α' ein körperliches Dreieck $\triangle$, und ebenso dieser Winkel mit β und S_2 ein zweites Dreieck δ , und es muss, da

$S_1 = S_2$
 $\alpha' = \alpha'$
 und Winkel $(S_1, \alpha') = \text{Winkel } (S_2, \alpha')$
 auch $W_1 = W_2$ sein [§. 46.],
 wobei W_1 und W_2 die an der dritten Seite anliegenden Winkel sein sollen. —

Zusatz I. Nach §. 46. ist auch $\alpha = \beta$, ferner macht die Hülfebene, welche den Winkel bei C halbt, mit der dritten Seite gleiche Winkel, und steht sohin senkrecht auf dieser. Hieraus folgt also der Satz:

Halbt man in einem gleichschenkligen körperlichen Dreiecke den Winkel, welchen die beiden gleichen Seiten einschliessen, so wird durch diese halbirende Ebene auch die dritte Seite halbt, und jene steht auf dieser senkrecht.

Zusatz II. In einem gleichseitigen körperlichen Dreiecke sind auch die drei Winkel einander gleich.

Zusatz III. Sind in einem körperlichen Dreiecke zwei Winkel einander gleich, so müssen auch die diesen Winkeln anliegenden Seiten gleich sein, d. h. das körperliche Dreieck ist sodann gleichschenkelig. Ist nämlich in einem körperlichen Dreiecke, dessen Seiten S_1 , S_2 und S_3 , dessen Winkel aber W_1 , W_2 und W_3 sein sollen,

$W_1 = W_2$, so muss auch
 $S_1 = S_2$

sein. Construiert man nämlich zu dieser Ecke das Supplementardreieck, so müssen die Winkel des letzteren: $180 - S_1$, $180 - S_2$ und $180 - S_3$, die Seiten desselben aber: $180 - W_1$, $180 - W_2$ und $180 - W_3$ sein.

Da nun $W_1 = W_2$, so ist auch

$$180 - W_1 = 180 - W_2, \text{ folglich}$$

ist in dem Supplementardreiecke, da dieses gleichschenkelig ist:

$$180 - S_1 = 180 - S_2 \text{ [Lehrs.]}$$

also auch $S_1 = S_2$,

was zu beweisen war. —

Anmerkung I. Alle Eigenschaften, welche für die körperlichen Dreiecke hier nachgewiesen und aufgezählt wurden, gelten auch für eine Gattung von Dreiecken, die man sphärische nennt.

Denkt man sich nämlich vom Scheitel eines dreiseitigen körperlichen Eckes aus mit einem beliebigen, aber sich gleichbleibenden Halbmesser, auf jeder Seite einen Kreisbogen beschrieben, der die Schenkel dieser Seite abschneidet, so wird dieser Bogen dasselbe Gradmass haben, als die dazu gehörige Seite, und seine Länge wird bestimmt werden können, wenn man die Länge des Halbmessers und die Grösse der Seite kennt.

Diese drei in den Seiten des körperlichen Dreieckes beschriebenen Bögen bilden nun ein Dreieck, dessen Seiten und Winkel dieselben sind, wie jene im Ecke selbst. Man nennt dieses Dreieck ein sphärisches.

Anmerkung II. Aehnliche Eigenschaften, wie sie hier für dreiseitige Ecken abgeleitet worden sind, könnten auch für körperliche Vielecke angegeben werden, denn es lässt sich ein körperliches Vieleck durch Ebenen in körperliche Dreiecke zerlegen, von welchen jene Eigenschaften bereits bekannt sind.

Anmerkung III. In den hier vorgetragenen Lehren über die dreiseitigen körperlichen Ecke sind die Regeln enthalten — wenn gleichwohl dieselben nicht ausgesprochen sind — nach welchen man verfahren müsste, um aus drei Bestimmungsstücken eines körperlichen Dreieckes die drei übrigen aufzusuchen. —

III. Abschnitt.

Von den geometrischen Körpern überhaupt und von den Oberflächen derselben und der Ausmessung der letzteren insbesondere.

A. Eigenschaften der geometrischen Körper überhaupt.

§. 50.

Es wurde schon früher [§. 1. d. eb. G. und §. 39.] erwähnt, dass man unter einem geometrischen Körper einen von allen Seiten begränzten Raum [körperlichen] versteht. —

Die Begränzung des körperlichen Raumes kann in verschiedener Weise geschehen. Sie ist aber immer entweder eine krumme oder eine aus ebenen Flächen zusammengesetzte Fläche, welche man gewöhnlich die Oberfläche des Körpers nennt. Hiedurch ist wohl der körperliche Raum ein begränzter, und besitzt vermöge dieser Begränzung besondere geometrische Eigenschaften, allein die Begränzung desselben von allen Seiten ist nicht nothwendig schon vorhanden.

In solchen Fällen, in welchen die Oberfläche den körperlichen Raum noch nicht von allen Seiten begränzt, geschieht letzteres gewöhnlich durch Ebenen. Durch diese erlangt aber der Körper seiner Qualität nach keine neuen Eigenschaften, sondern nur der Quantität nach.

Alle Flächen zusammengenommen, welche einen geometrischen Körper begränzen, nennt man die Gesamtoberfläche des letzteren, und den von dieser eingeschlossenen Raum, sobald derselbe in Zahlen ausgedrückt wird, den Inhalt oder das Volumen des Körpers. —

Jene Wissenschaft, welche sich mit den Eigenschaften der geometrischen Körper und deren Oberflächen beschäftigt, wird **S t e r e o m e t r i e** genannt. *)

§. 51.

Erklärungen. Unter den geometrischen Kör-

*) Es ist hier und im Folgenden nur von den einfachsten geometrischen Körpern und solchen die Rede, die in einfache zerlegt, oder als aus diesen zusammengesetzt betrachtet werden können. —

pern gibt es, wie §. 50. erwähnt wurde, solche, deren Oberflächen aus ebenen Flächen zusammengesetzt, und solche, deren Oberflächen krumme Flächen sind. Der Ordnung nach sollen nun die einfachen Körper betrachtet werden. —

1) Bewegt sich eine Gerade so, dass sie stets mit ihrer ursprünglichen Richtung parallel bleibt, und dabei alle Seiten einer geradlinigen Figur trifft, so entsteht eine Fläche, die man prismatische nennt.

Schneidet man diese prismatische Fläche durch zwei parallele Ebenen ab, so erhält man einen Körper, welcher Prisma genannt wird.

Die einzelnen Flächen, aus welchen die Oberfläche des Prisma zusammengesetzt ist, müssen [§. 1. Nro. 4.] ebene Figuren sein. Man nennt diese die Seitenflächen; die beiden begrenzenden Flächen des Prisma's aber, deren Ebenen parallel zu einander angenommen wurden, nennt man die Grundflächen des Prisma.

Steht die Erzeugende der prismatischen Oberfläche — Kante des Prisma's genannt — auf den Grundflächen senkrecht, so bildet auch jede Kante mit den Seiten der Grundfläche, die sie trifft, rechte Winkel, und das Prisma heisst sodann ein senkrecht es. Wird diese Bedingung nicht erfüllt, so heisst das Prisma ein schiefes.

Nach der Anzahl der Seitenflächen oder nach der Anzahl der Seiten einer der Grundflächen, wird das Prisma benannt, und es heisst sodann drei-, vier-, fünfseitiges etc., wenn die Anzahl der Seitenflächen oder die Zahl der Seiten der Grundflächen gleich drei, vier, fünf etc. ist. — Der Abstand der Grundflächen eines Prisma wird seine Höhe genannt.

Bei einem senkrechten Prisma ist jede einzelne Kante der Höhe gleich [§. 22.].

2) Bewegt sich eine Gerade parallel mit ihrer ursprünglichen Lage und trifft stets den Umfang einer krummlinigen Figur, so beschreibt dieselbe eine cylindrische Fläche. Begränzt man diese Oberfläche durch zwei parallele Ebenen, so erhält man einen Körper, der ein Cylinder genannt wird. Die beiden Durchschnittenfiguren der parallelen Ebenen mit der cylindrischen Fläche, nennt man die Grundflächen, und den Abstand der letzteren, die Höhe des Cylinders.

Je nachdem nun die Erzeugende der Cylinderfläche der Höhe des Cylinders parallel ist oder nicht, wird der Cylinder ein senkrechter oder ein schiefer genannt.

Nach der Beschaffenheit des Umfanges der Grundflächen wird der Cylinder jedesmal bezeichnet. Im Folgenden ist aber nur von solchen Cylindern die Rede, deren Grundflächen Kreise sind, nämlich von den Kreiscylindern. —

Da man [nach §. 73. Zus. I. der eb. G.] jede Kreislinie als ein regelmässiges Polygon von unendlich vielen Seiten betrachten kann, und da ferner je zwei auf einander folgende Lagen der Erzeugenden des Cylinders [§. 1. Nro. 4.] in einer Ebene liegen, so kann man jeden Kreiscylinder als ein Prisma von unendlich vielen Seitenflächen betrachten.

Es ist daher auch erlaubt, innerhalb der Grenzen, zwischen welchen diese Behauptung wahr ist, alle Eigenschaften des Prisma's auf jene des Kreiscylinders überzutragen. —

Die Fig. 26. stellt ein Prisma, Fig. 27. einen Kreiscylinder vor. —

Einen geraden oder senkrechten Kreiscylinder kann man sich auch dadurch erzeugt denken, dass eine begrenzte Gerade parallel zu einer fixen gegebenen Geraden bleibend, um diese sich dreht. — Diese Gerade heisst auch Axe des Cylinders, und ein solcher Cylinder wird im gemeinen Leben auch eine Walze genannt. —

3) Bewegt sich eine Gerade so, dass sie stets durch einen fixen Punct geht und dabei eine geradlinige Figur trifft, so erzeugt dieselbe eine Fläche, welche man pyramidalische nennt. Schneidet man diese durch eine Ebene ab, so erhält man zwischen dieser Ebene und dem fixen Puncte einen Körper, der Pyramide genannt wird. Die Durchschnitsfigur dieser Ebene mit der pyramidalischen Fläche heisst die Grundfläche, und der Punct, durch welchen alle Erzeugenden der Oberfläche gehen, wird die Spitze der Pyramide genannt. Die Flächen, welche die Pyramide begrenzen, müssen [§. 1. Nro. 4.] ebene Flächen sein, und heissen die Seitenflächen der Pyramide. —

Nach der Anzahl der Seiten der Grundfläche einer Pyramide heisst dieselbe dreiseitig, vierseitig etc. — Die dreiseitige Pyramide ist der einfachste geometrische Körper. —

Die Senkrechte, welche man von der Spitze einer Pyramide auf ihre Grundfläche ziehen kann, nennt man die Höhe dieses Körpers.

Sind alle einzelnen Scheitel der Grundfläche vom Fusse der Höhe gleich weit entfernt, so heisst die Py-

ramide eine senkrechte; ist diess aber nicht der Fall, so wird die Pyramide eine schiefe genannt. Die Grundfläche einer senkrechten Pyramide hat also immer die Eigenschaft, dass ihre Scheitel auf der Peripherie eines Kreises liegen, oder dass man um dieselbe einen Kreis beschreiben kann. — Jede Gerade, von der Spitze einer Pyramide nach einem Scheitel der Grundfläche gezogen, wird Kante genannt. —

Ein zwischen zwei parallelen Ebenen enthaltener Theil einer Pyramide wird abgekürzte Pyramide [Pyramis decurtata] genannt.

4) Nimmt man anstatt der geradlinigen Figur eine krummlinige als Directrix, und bleiben sonst dieselben Umstände, wie bei der pyramidalischen Fläche, so erhält man eine conische oder Kegelfläche.

Wird diese durch eine Ebene abgeschnitten, so wird derjenige Körper, welcher zwischen dieser ebenen Durchchnittsfigur und dem angenommenen fixen Punkte enthalten ist, ein Kegel oder Conus genannt.

Jene Durchschnitsfigur wird die Grundfläche des Kegels genannt. Ist diese ein Kreis, so heisst der Körper ein Kreiskegel, oder auch geradezu ein Kegel. Die Senkrechte von der Spitze des Kegels auf seine Grundfläche gezogen, heisst die Höhe desselben. Fällt der Fusspunct der Höhe mit dem Mittelpuncte der Grundfläche zusammen, so hat man einen senkrechten oder geraden, übrigens aber in allen andern Fällen einen schiefen Kegel. — Jede Gerade auf der Kegelfläche, welche von der Spitze nach einem Punkte der Grundfläche gezogen werden kann, heisst Seite des Kegels.

Ein zwischen zwei parallelen Ebenen enthaltenes Stück eines Kegels wird ein abgekürzter Kegel [Conus decurtatus] genannt.

Den geraden Kreiskegel kann man sich auch dadurch erzeugt denken, dass die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes um eine der Katheten des letzteren sich dreht. Jeden geraden und abgekürzten Kegel kann man sich erzeugt denken, indem die schiefe Seite eines rechtwinkligen Trapezes sich um die senkrechte Seite des letzteren dreht.

Auch hier muss bemerkt werden, dass man [Nro. 2.] einen Kegel als eine Pyramide von unendlich vielen Seitenflächen betrachten kann. —

5) Bewegt sich eine krumme Linie um eine fixe Gerade, so entsteht eine Fläche, welche man Rotationsfläche nennt.

Eine Rotationsfläche, welche erzeugt wird, durch Drehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser, wird eine Kugelfläche, und der von dieser Fläche eingeschlossene Körper eine Kugel [Sphära, globus] genannt. —

Der Mittelpunkt des erzeugenden Kreises wird auch der Mittelpunkt der Kugel genannt, denn es stehen alle Punkte der Oberfläche der Kugel von demselben gleichweit ab. Jeder solche Abstand wird Halbmesser, und jede Gerade, welche durch den Mittelpunkt der Kugel gehend, zwei Punkte ihrer Oberfläche verbindet, ein Durchmesser derselben genannt. Es folgt hieraus sogleich, dass ein Durchmesser zweien Radien gleich sein muss. Ferner folgt, dass alle Kugeln von gleichen Radien congruente Körper sein müssen. —

§. 52.

Lehrsatz. [Fig. 57.] In einem jeden Prisma sind

1. die Kanten [diejenigen Seiten der Seitenflächen nämlich, welche zwei entsprechende Scheitel beider Grundflächen verbinden] unter sich gleich;
2. die einzelnen Seitenflächen Parallelogramme;
3. die beiden Grundflächen congruente Figuren.

Ad 1. Beweis. Es sei FGHKB ein Prisma, und AF, BG, CH, DI und EK seine Kanten, so muss

$$AF \# BG \# CH \# DI \text{ [§. 51. Nro. 1.]}$$

Diese Geraden liegen aber zwischen den Ebenen der Grundflächen, welche [§. 51. Nro. 1.] parallel sind, und es muss daher auch

$$AF = BG = CH = DI \text{ sein [§. 20. Zus. II.]}$$

Ad 2. Beweis. Da $AF =$ und $\#$ EK ist, so muss auch AK ein Parallelogramm sein [§. 46. Zus. eb. G.].

Ebenso ist auch jede der übrigen Seitenflächen BF, BH, CI etc. ein Parallelogramm.

Ad 3. Beweis. Aus 2. erhellt, dass

$$AB = \text{und } \# FG$$

$$BC = \text{und } \# GH$$

$$CD = \text{und } \# HI$$

$$DE = \text{und } \# IK$$

$$EA = \text{und } \# KF,$$

daher ist auch $BAE = GFK$

$$ABC = FGH$$

$$BCD = GHI$$

$$CDE = HK$$

$$\text{und } DEA = IKF$$

[§. 23.]

Sohin hat man $ABCDE \cong FGHK$.

I. Zusatz. Die Durchschnitte paralleler Ebenen mit einem Prisma sind congruente Figuren. Denn, betrachtet man irgend zwei solche Durchschnittenfiguren, so findet man, dass die gleichliegenden Seiten derselben unter sich parallel sein müssen [§. 18.]. Diese Seiten bilden aber [Lehrs.] mit den Theilen der Kanten, welche zwischen den Durchschnittebenen liegen, Parallelogramme, und sind daher auch einander gleich.

Ausserdem müssen aber die einzelnen Winkel beider Figuren einander gleich sein [§. 23.], und die Figuren selbst sind daher congruent.

II. Zusatz. Sind die Grundflächen eines vierseitigen Prisma's, Parallelogramme, so sind je zwei gegenüberstehende Seitenflächen zueinander parallel und congruent. Ein Prisma dieser Art wird ein Parallelepipedon genannt. [Fig. 28.].

Ist das Parallelepipedon ein senkrechtes und seine Grundfläche ein Rechteck, so sind auch die Seitenflächen Rechtecke, und das Parallelepipedon heisst sodann ein rechteckiges. —

Sind in einem rechteckigen Parallelepipedon die Kanten den Seiten der Grundfläche gleich, also auch diese unter sich, so sind alle Figuren, welche die Gesamtoberfläche begränzen, gleiche Quadrate. Ein solches Parallelepipedon wird auch ein Hexaeder, Cubus oder Würfel genannt. —

Sind in einem schiefen Parallelepipedon die Grundflächen Rauten, und ihre Seiten den Kanten gleich, so heisst das Parallelepipedon ein Rhomboeder.

III. Zusatz. In einem Parallelepipedon kann man jede Seitenfläche als Grundfläche nehmen.

IV. Zusatz. Die Durchschnichtsfigur eines parallel zur Grundfläche geschnittenen Cylinders ist ein Kreis und mit der Grundfläche congruent.

§. 53.

Lehrsatz. In einer jeden Pyramide sind

1. die Seitenflächen Dreiecke,
2. die ebenen Durchschnichtsfiguren parallel zur Grundfläche sind mit dieser und unter sich ähnlich.

Beweis. [Fig. 31.] Ad 1. Da die Seitenflächen [§. 51. Nro. 3.] Ebenen sind, die einen Punkt gemein haben, und diese die Ebenen der Grundflächen nach Geraden schneiden, so bilden nothwendig die Kanten mit den Seiten der Grundfläche Dreiecke. —

Ad 2. Ist Eb. $bd \parallel$ Eb. BD , so müssen auch nothwendig die einzelnen Seiten der Figur $bcde$ mit den entsprechenden Seiten der Grundfläche, als Durchschnitte paralleler Ebenen mit den Seitenflächen [§. 18.] parallel sein. Es ist daher auch [§. 23.]: $b = B$, $c = C$, $d = D$, $e = E$.

Ausserdem ist aber auch

$$BE : be = BA : ba = BC : bc$$

$$BC : bc = CA : ca = CD : cd \text{ etc. ,}$$

daher ist $bcde \sim BCDE$

Auf dieselbe Weise wird dieser Satz auch für eine fünfseitige, sechsseitige, und überhaupt für jede Pyramide bewiesen.

I. Zusatz. Schneidet man eine Pyramide durch mehrere parallele Ebenen, so sind die Durchschnichtsfiguren unter sich ähnlich.

II. Zusatz. Es ist $Ab:AB = Ae:AE = Ad:AD = Ac:AC$ etc. [§. 79. eb. G.].

Ferner, wenn AF die Höhe der Pyramide BCDEA ist, und diese die Durchschnichtsfigur in f trifft, und man legt durch AFB eine Ebene, so wird die Durchschnichtsline bf der letzteren mit der zur Grundfläche parallelen Ebene bedc zu BF parallel sein. Daher ist im $\triangle ABF$ [nach §. 79. eb. G.]:

$$Ab:AB = Af:AF$$

also auch $Ac:AC = Af:AF$ etc. etc.

Man hat sohin folgenden Satz:

Wird eine Pyramide parallel zur Grundfläche durch eine Ebene geschnitten, so stehen die Theile der Kanten unter sich und mit den Theilen der Höhe der Pyramide in gleichem Verhältnisse.

III. Zusatz. Die zur Grundfläche parallele Durchschnichtsfigur eines Kegels ist ein Kreis. [Lehrsatz.] —

§. 54.

Lehrsatz. In einer senkrechten Pyramide sind alle Kanten unter sich gleich.

Beweis. Da [§. 51. Nro. 3.] in einer senkrechten Pyramide die Scheitel der Grundfläche vom Fusse der Höhe gleiche Entfernungen haben müssen, so müssen auch [nach §. 6. Nro. 3.] die einzelnen Kanten unter sich gleich sein. — Die Seitenflächen einer

senkrechten Pyramide sind sohin gleichschenklige Dreiecke. —

Zusatz. Ist die Grundfläche einer senkrechten Pyramide eine regelmässige Figur, so sind alle Seitenflächen unter sich congruente Dreiecke.

Anmerkung. Ist die Grundfläche einer senkrechten Pyramide ein reguläres Dreieck, und sind die Seiten des letzteren so gross als die Kanten der Pyramide, so wird die letztere ein Tetraeder genannt. —

§. 55.

Lehrsatz. Wird eine Kugel von einer Ebene geschnitten, so ist die Durchschnitsfigur immer ein Kreis.

Beweis. [Fig. 32.] Zieht man vom Mittelpunkte der Kugel auf die Ebene der Durchschnitsfigur eine Senkrechte, und verbindet beliebige Punkte des Umfanges der Durchschnitsfigur, z. B. F, G und I mit dem Fusse H der Senkrechten CH, so ist $CG = CI = CF$ etc. als Halbmesser der Kugel. Es sind sohin die Punkte des Umfanges, nämlich G, F und I vom Fusse H der Senkrechten gleich weit entfernt [§. 6. Zus. I.], d. h.

$HG = HI = HF$ etc., also ist die Figur GFL ein Kreis, dessen Mittelpunkt im Fusse H der Senkrechten CH ist. — Dieser Kreis wird **Kugelkreis** genannt.

I. Zusatz. Der Halbmesser r eines Kugelkreises ist immer, wenn R der Kugelradius und h die vom Kugelmittelpunkte auf die Ebene des Kugelkreises gezogene Senkrechte bedeutet,

$$r = \sqrt{R^2 - h^2}, \text{ also ist auch} \\ h = \sqrt{R^2 - r^2}$$

II. Zusatz. Die vom Mittelpunkte einer Kugel auf die Ebene eines Kugelkreises gezogene Senkrechte geht immer durch den Mittelpunkt des Kreises.

III. Zusatz. Zieht man vom Mittelpunkte eines Kugelkreises auf die Ebene desselben eine Senkrechte, so muss diese, gehörig verlängert, durch den Mittelpunkt der Kugel gehen.

Denn gesetzt diese Senkrechte ginge nicht durch den Mittelpunkt der Kugel, so könnte man vom letzteren auf den Kugelkreis eine Senkrechte ziehen, und diese müsste durch den Mittelpunkt des kleinen Kreises gehen [Zus. II.]. Man hätte also auf letzterem in einem Punkte zwei Senkrechte, was [§. 5. Zus. III.] unmöglich ist. Es müssen daher beide zusammenfallen, also geht jene Senkrechte auch durch den Mittelpunkt der Kugel. —

IV. Zusatz. Eine Gerade, welche den Mittelpunkt der Kugel mit dem Mittelpunkte eines Kugelkreises verbindet, steht auf der Ebene des letzteren senkrecht, denn sie fällt mit der vom Mittelpunkte der Kugel auf die Ebene des Kugelkreises gezogene Senkrechte zusammen. —

V. Zusatz. Jeder Kreis, dessen Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht, hat mit dieser einerlei Halbmesser, und wird daher grösster Kugelkreis genannt. [Fig. 32.] ist AMB ein grösster Kreis.

VI. Zusatz. Jeder grösste Kugelkreis theilt die Kugel und deren Oberfläche in zwei congruente Theile. Alle grössten Kugelkreise halbiren sich gegenseitig. —

§. 56.

Lehrsatz. [Fig. 32.] Zwei Kugelkreise, deren Ebenen gleichweit vom Mittelpunkte der Kugel abste-
hen, haben gleiche Halbmesser; von zwei Kreisen aber, deren Ebenen nicht gleichen Abstand vom Mittelpunkte der Kugel haben, ist jener der grössere, der näher an diesem Punkte sich befindet.

Beweis. Ad 1. Ist QSR ein Kugelkreis und FLG ein zweiter, ferner P der Mittelpunkt des ersten und H der des zweiten, so hat man

$$\text{Thes. } HG = PQ$$

$$\text{Dat. } CH = CP$$

Legt man durch CQP sowohl als durch CHG eine Ebene, und zieht in diesen CQ und CG, so ist

$$CG = CQ \text{ [als Radien der Kugel]}$$

$$CH = CP \text{ [Dat.]}$$

$$CHG = CPQ = R \text{ [§. 5. I. Zus.]}$$

$$\text{also } \triangle CHG \cong \triangle CPQ \text{ [§. 31. eb. G.]}$$

$$\text{und } HG = PQ$$

Ad 2. Ist FEST ein Kugelkreis, und sein Abstand CK vom Mittelpunkte grösser als der Abstand CH des Kreises FLG vom Mittelpunkte, so muss $FK < HG$ sein. Denn legt man durch CK und CH eine Ebene, so schneidet diese die Kugel nach einem grössten Kreise DAQB. In diesem sind aber die Durchmesser FS und FG obiger Kreise Sehnen, und daher

FS $\leq$ FG, also auch

$\frac{1}{2}$ FS oder FK $\leq$ $\frac{1}{2}$ FG oder FH.

Zusatz. Sind zwei Kugelkreise einander gleich, so haben dieselben auch gleiche Abstände vom Mittelpunkte der Kugel, und sind zwei Kugelkreise ungleich, so muss der kleinere weiter vom Mittelpunkte liegen, als der grössere. —

§. 57.

Erklärungen. [Fig. 32.] 1. Zwei Punkte der Kugelfläche, von welchen jeder von allen Punkten eines Kugelkreises gleich weit entfernt ist, heissen Pole dieses Kreises. Die Verbindungslinie dieser beiden Punkte muss nothwendig senkrecht auf der Ebene des Kugelkreises stehen, und daher auch durch den Mittelpunkt der Kugel gehen; denn es kann sehr leicht durch Benützung von §. 5. gezeigt werden, dass die im Mittelpunkte des Kreises FLGH auf seine Ebene errichtete Senkrechte sowohl durch G als auch durch E gehen muss.

Diese Gerade, welche beide Pole verbindet, heisst Axe des Kugelkreises. — Jeder Durchmesser der Kugel kann als Axe einer grossen Anzahl Kugelkreise sowohl, als auch als Axe der Kugel selbst betrachtet werden. —

2. Nimmt man einen Durchmesser einer Kugel als Axe derselben an, und denkt sich senkrecht auf diese Axe mehrere Ebenen gelegt, so werden diese [§. 16.] zu einander parallel sein, und [§. 55.] die Kugel nach Kreisen schneiden. Diese Kreise werden Parallel-Kreise genannt; alle durch jene Axe gelegten Ebenen aber schneiden die Kugel nach Kreisen, welche man

Meridiane nennt. — Jeder solche Meridian kann als Erzeugungskreis der Kugel betrachtet werden. —

3. Jeder zwischen zwei Parallelkreisen enthaltene Theil der Kugeloberfläche, wird **Zone** genannt; diese Kreise selbst heissen **Grundflächen** der letzteren. Der zwischen beiden Kreisen enthaltene Theil der Kugel heisst **körperliche Zone**. — Eine körperliche Zone mit einer Grundfläche wird ein **Kugelabschnitt** [Segment] genannt. —

4) Jeder kegelförmige Theil einer Kugel, dessen Grundfläche ein Theil der Kegelfläche — die Oberfläche des Kugelabschnittes —, und dessen Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist, wird ein **Kugelausschnitt** [Sector] genannt.

5) Ein zwischen zwei grössten Kreisen liegender Theil der Kugel, wird **keilförmiger Kugelausschnitt** genannt.

6) Schneiden sich die Peripherien dreier grössten Kreise, so wird der zwischen ihnen enthaltene Theil der Kugelfläche ein **Kugel** — oder **sphärisches Dreieck** genannt. Ein von mehr als drei Bögen grösster Kreise eingeschlossener Theil der Kugeloberfläche wird ein **sphärisches Vieleck** genannt. —

§. 58.

Erklärungen. 1) Jeder Körper, welcher aus ebenen Vielecken begränzt wird, heisst ein **Polyeder**. —

2). Zwei Polyeder sind **congruent**, wenn sie von gleich viel Polygonen begränzt werden, und jene des einen Polyeders denen des andern congruent sind und

in einerlei Ordnung auf einander folgen, ferner die Flächenwinkel in beiden gegenseitig gleich sind. —

Sind in beiden Polyedern alle Seitenflächen congruent und die Flächenwinkel gleich, folgen aber in verkehrter Ordnung auf einander, so sind beide Polyeder wohl gleich, aber nicht congruent. In diesem Falle heissen dieselben symmetrisch gleich. —

3) Hat ein aus geradlinigen ebenen Figuren begränzter Körper lauter reguläre und congruente Seitenflächen, und sind die aus denselben gebildeten Körperwinkel congruent, so heisst dasselbe regelmässig.

Da ein Winkel eines regulären Dreieckes gleich $60^\circ = \frac{2}{3}R$ beträgt, so kann man aus drei, vier und fünf regelmässigen Dreiecken noch ein körperliches Eck bilden [§. 41.], aber nicht mehr aus sechs regelmässigen Dreiecken, denn $6 \cdot 60 = 360^\circ$. Es gibt daher drei regelmässige Körper, welche aus regelmässigen Dreiecken begränzt sind, nämlich:

- a) das schon früher erwähnte Tetraëder [Fig. 62.],
- b) das von acht regelmässigen Dreiecken begränzte reguläre Polyeder: Octaëder [Fig. 63.] und
- c) das durch zwanzig Dreiecke begränzte reguläre Polyeder: Icosaëder [Fig. 64.]

Aus congruenten Quadraten lässt sich [§. 41.] nur ein regelmässiger Körper bilden, und dieser ist der Würfel.

Ferner lässt sich ebenso aus regelmässigen Fünfecken nur noch ein regelmässiger Körper bilden, und dieser ist noch möglich, da drei Winkel eines regelmässigen Fünfeckes zusammen $\frac{6}{5}R \times 3 = 108^\circ \times 3 = 324^\circ$ ausmachen, also durch drei regelmässige Fünfecke ein körperliches Eck gebildet werden kann.

Das durch regelmässige Fünfecke begränzte reguläre Polyeder wird Dodecaëder genannt [Fig. 66.]; es ist nämlich durch zwölf regelmässige Fünfecke begränzt. —

Ausser den hier angeführten regelmässigen Körpern gibt es keine, denn es geben drei Winkel bei jedem der übrigen regelmässigen Vielecke zusammen entweder schon 360° oder mehr als 360° . —

B. Berechnung der Oberflächen der vorzüglichsten geometrischen Körper.

§. 59.

Erklärungen. 1) Jede Fläche, die auf eine Ebene ausgebreitet werden kann, ohne sich zu falten oder zu biegen, nennt man entwickelbar. — Man nennt eine solche Entwicklung das Netz des Körpers, dem diese Fläche angehört.

Entwickelbar sind daher alle Polyeder, oder überhaupt alle aus ebenen Figuren zusammengesetzte Körperoberflächen. —

Unter den oben genannten geometrischen Körpern sind es aber auch noch die Oberflächen der Cylinder und Kegel. —

Denkt man sich nämlich an einer Cylinderfläche eine grosse Anzahl von Erzeugenden gezogen, so kann man durch je zwei aufeinander folgende Lagen derselben eine Ebene legen. Wenn man sich nun nach der Richtung einer solchen Erzeugenden die Fläche geöffnet denkt, sodann die Ebene der ersten zwei Erzeugenden

so weit dreht, bis sie in die Ebene der 2. und 3. Erzeugenden, diese Ebene so weit dreht, bis sie in jene der 3. und 4. Erzeugenden fällt etc., so wird man durch fortgesetztes Verfahren endlich die ganze Cylinderfläche in eine Ebene ausgebreitet haben. Es bildet sodann diese Fläche ein Parallelogramm, von dem die Peripherie der Grundfläche eine Seite und die andere Seite die des Cylinders ist. —

Auf dieselbe Weise findet man, dass auch eine Kegelfläche, und überhaupt jede geradlinig erzeugte Fläche entwickelbar ist, bei welcher zwei unmittelbar aufeinander folgende Lagen der Erzeugenden in einer Ebene liegen. —

Zusatz I. Die Oberfläche eines regulären Körpers findet man, wenn man eine seiner Seitenflächen berechnet, und durch die Zahl derselben den gefundenen Werth multiplicirt. — Die Netze der regulären Körper sind Fig. 33, 34, 35, 36 und 37. abgebildet. —

Zusatz Die Kugelfläche ist nicht entwickelbar. —

§. 60.

Aufgabe. Die Oberfläche eines jeden Prisma zu finden.

Auflösung. Man berechne eine der Grundflächen, nehme den gefundenen Werth doppelt und addire dazu die Summe der Seitenflächen, die man beim senkrechten Prisma durch das Product aus dem Perimeter der Grundfläche in die Höhe des Prisma erhält. Durch die Anschauung des in Fig. 38. dargestellten Netzes eines vierseitigen Prisma wird obiges klar. Ist das Prisma schief, so muss man seine Seitenflächen (Parallelogramme) besonders berechnen.

Zusatz. (Fig. 39.) Da beim senkrechten Cylinder die Grundfläche ein Kreis, folglich $= r^2\pi$, und die krumme Seitenfläche ein Rechteck aus der Peripherie der Grundfläche $2r\pi$ und der Höhe des Prisma h ist, so ist die Oberfläche des Cylinders oder

$$S = 2r^2\pi + 2r\pi h = 2r\pi [r + h].$$

Für den Fall, dass $h = 2r$ ist, wird $S = 6r^2\pi$.

§. 61.

Aufgabe. Die Oberfläche einer jeden Pyramide zu berechnen.

Auflösung. Man berechne die Grundfläche und addire dazu die Summe aller Seitenflächen (Dreiecke). Ist die Pyramide gleichseitig, so findet man ihre ganze Seitenfläche, wenn man den halben Perimeter der Grundfläche mit der Höhe eines Seitendreieckes multiplicirt [§. 49. Zus. III. eb. G.]. Fig. 40. stellt das Netz einer solchen Pyramide dar. Ist die Pyramide schief, so muss man jede Seitenfläche als Dreieck besonders berechnen.

Zusatz. Beim senkrechten Kegel, dessen Netz Fig. 41. darstellt, ist die Grundfläche $r^2\pi$, dann die krumme Seitenfläche einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie der Umfang der Grundfläche $2r\pi$ und dessen Höhe die Seite des Kegels a ist [§. 49. Zus. III. eb. G.]. Daher die ganze Oberfläche oder

$$S = r^2\pi + r\pi a = r\pi [r + a].$$

Ist bei einem solchen Kegel bloss der Radius der Grundfläche r und die Höhe h gegeben, so kann man daraus a finden, nämlich es ist (Fig. 30.):

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} \text{ [§. 88. Zus. III. eb. G.]}$$

$$\text{oder } a = \sqrt{h^2 + r^2}. \text{ Mithin}$$

auch $S = r\pi [r + \sqrt{h^2 + r^2}]$.

Für den Fall, dass $h = 2r$ ist, wird

$$S = r^2\pi [1 + \sqrt{5}].$$

§. 62.

Aufgabe. Die Oberfläche einer abgekürzten Pyramide zu finden

Auflösung. Man berechne die beiden parallelen ebenen Figuren, addire dazu die Summe der Seitenflächen (Trapeze), die man bei der gleichseitigen abgekürzten Pyramide erhält, indem man die halbe Summe der Perimeter der untern und obern Grundfläche mit der Höhe eines Trapezes multiplicirt. Denn mehrere Trapeze von gleichen Höhen sind zusammen einem Trapeze von derselben Höhe gleich, dessen Grundlinie der Summe der Grundlinien der einzelnen, und dessen obere Parallele der Summe der oberen Parallelen der einzelnen Trapeze gleich ist. Ist die abgekürzte Pyramide schief, so muss man die einzelnen Seitentrapeze besonders berechnen. Fig. 42. ist das Netz einer senkrechten abgekürzten Pyramide.

I. Zusatz. Sind R und r die Radien der beiden Kreise und $a = b$ (Fig. 30.) die schiefe Seite eines senkrechten abgekürzten Kegels, so ist, obiger Auflösung gemäss, dessen krumme Seitenfläche

$$= [2R\pi + 2r\pi] \frac{a}{2}$$

$$= [R + r] a\pi$$

Addirt man dazu die beiden Kreisflächen $R^2\pi$ und $r^2\pi$, so ist die ganze Oberfläche oder

$$S = R^2\pi + r^2\pi + a\pi [R + r]$$

$$= \pi [R^2 + r^2 + a [R + r]].$$

Fig. 43. ist ein Netz eines senkrechten abgekürzten Kegels.

II. Zusatz. (Fig. 30.) Bezeichnet $Dd = h$ die Höhe des abgekürzten Kegels, und fällt man, in der Ebene ABC , die Linie bE senkrecht auf BC ; so ist $bE = Dd = h$, und

$$bB^2 = bE^2 + BE^2 \text{ [§. 88. Zus. III. eb. G.], oder}$$

$$a^2 = h^2 + [R - r]^2, \text{ und}$$

$$a = \sqrt{h^2 + [R - r]^2}.$$

Mithin ist die Oberfläche eines abgekürzten Kegels, durch R , r und h ausgedrückt, oder

$$S = \pi [R^2 + r^2 + [R + r] \sqrt{h^2 + [R - r]^2}].$$

[Zus. I.]

III. Zusatz. (Fig. 30.) Halbirt man Bb in m , und und zieht man $mn \parallel BC$, so ist $mn = R + r$ [§. 81. eb. G.], und die krumme Seitenfläche des abgekürzten Kegels

$$= [R + r] a \pi = mn \cdot a \cdot \pi \text{ [Zus. I.]}$$

$$= 2 \cdot mo \cdot a \cdot \pi; \text{ d. h.}$$

die krumme Seitenfläche des senkrechten abgekürzten Kegels ist der eines Cylinders von der Höhe a gleich, der aber zur Grundfläche einen Kreis hat, dessen Radius dem arithmetischen Mittel zwischen den beiden Radien der Grundflächen des Kegels gleicht.

§. 63.

Lehrsatz. Wenn eine Kugel einen abgekürzten Kegel von innen so berührt, dass die Ebene des Berührungskreises die Höhe des abgekürzten Kegels halbirt; so ist die krumme Seitenfläche dieses abgekürzten Kegels der eines Cylinders gleich, dessen Grundfläche

der grösste Kugelkreis der Kugel, und dessen Höhe die Höhe des abgekürzten Kegels ist.

Beweis. (Fig. 44.) Es sei $OL = 2r$ die Axe der Kugel und der Kreis um M ein grösster Kugelkreis. Man ziehe durch den Punct A dieses Kreises die Tangente BC , mache $AB = AC$, und fälle BH und CI senkrecht auf OL . Dreht man die Fläche $CBHJ$, so wie auch die Kreisfläche um OL , so beschreibt jene einen abgekürzten senkrechten Kegel, dessen Höhe $HI = h$ ist, und diese eine Kugel, welche den abgekürzten Kegel von innen so berührt, dass die Ebene des Berührungskreises die Höhe des abgekürzten Kegels in K halbt. Dem Lehrsatz gemäss soll die krumme Seitenfläche dieses abgekürzten Kegels der eines Cylinders gleich sein, der dieselbe Höhe h , aber den grössten Kugelkreis der Kugel zur Grundfläche hat. Nun ist die krumme Seitenfläche des abgekürzten Kegels $= [BH + CI] CB\pi$ [§. 62. Zus. I.], und die des Cylinders $= 2r\pi h$ [§. 60. Zus.]. Daher

$$\text{Thes. } [BH + CI] CB\pi = 2r\pi h.$$

Daten. Es ist $AB = AC$, und $DE = EF$, folglich, wenn man AE zieht, $AE = \frac{1}{2}[BD + CF] = BH + CI$

Man fälle von B auf CF die Senkrechte $BN = HI = h$, ziehe dann den Diameter AG und die Linie EG ; so ist

$$BNC = AEG = R$$

$$m = o = n, [\text{§. 66. eb. G.}],$$

$$\text{folglich } \triangle BNC \simeq \triangle AEG. [\text{§. 84. eb. G.}]$$

$$\text{Mithin } BC : BN = AG : AE, \text{ oder}$$

$$BC : h = 2r : [BH + CI], \text{ und}$$

$$\text{daher } [BH + CI] BC = 2rh, \text{ folglich auch}$$

$$[BH + CI] BC\pi = 2r\pi h \text{ sein.}$$

Zusatz. Jede Zone, deren Höhe unendlich klein ist, ist der krummen Seitenfläche eines Cylinders von derselben Höhe gleich, dessen Grundfläche der grösste Kugelkreis der Kugel ist. (Fig. 44.) Denn, je kleiner HI wird, desto näher rückt die Tangente BC dem Bogen PQ. Wird HI unendlich klein, so fällt die Tangente BC mit dem unendlich kleinen Bogen PQ zusammen, und es ist die krumme Fläche der, durch die Umdrehung des unendlich kleinen Bogens entstandenen, unendlich kleinen Zone gleich der krummen Seitenfläche des, durch die Umdrehung der unendlich kleinen Tangente beschriebenen, abgekürzten Kegels. Dieses gilt von jeder andern Zone, deren Höhe unendlich klein ist. Es gleicht also eine solche Zone auch der krummen Seitenfläche eines Cylinders, dessen Grundfläche der grösste Kugelkreis, und dessen Höhe ebenfalls unendlich klein ist [Lehrs.]

§. 64.

Aufgabe. Eine Zone, die krumme Oberfläche eines Kugelabschnitts, so wie die der ganzen Kugel zu berechnen.

Auflösung und Beweis. 1) Um eine Zone zu berechnen, multiplicire man den Umfang des grössten Kugelkreises der Kugel mit der Höhe der Zone, d. i. (Fig. 45.)

Zone ABCD $= 2r\pi h$, wenn r der Radius der Kugel und $h = FG$ die Höhe der Zone ist; denn, man denke sich die Zone durch unendlich nahe liegende Parallelkreise in unendlich viele kleinere Zonen, deren Höhen unendlich klein sind, getheilt. Jede davon gleicht der krummen Seitenfläche eines Cylinders von derselben Höhe, dessen Grundfläche der grösste Kugelkreis

der Kugel ist [§. 63. Zus.]. Es ist also, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. die Höhen dieser unendlich kleinen Zonen sind,

die erste derselben $\equiv 2r \pi \alpha$

die zweite „ $\equiv 2r \pi \beta$

die dritte „ $\equiv 2r \pi \gamma$ etc.

Mithin die ganze Zone ABCD $\equiv 2r \pi [\alpha + \beta + \gamma + \dots]$

$\equiv 2r \pi h$, weil

$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots = h$ ist.

2) Geht GF in GE über, so wird aus der Zone die krumme Oberfläche des Kugelabschnittes, daher auch diese $\equiv 2r \pi h$, wenn r der Radius der Kugel und $h \equiv EG$ die Höhe des Kugelabschnitts ist [1.].

3) Setzt man $h \equiv r$, so entsteht für die Oberfläche der Halbkugel $2r^2\pi$ [2.], mithin ist die Oberfläche der ganzen Kugel $\equiv 4r^2\pi$, d. h. die Oberfläche einer jeden Kugel ist ihrer vierfachen grössten Kugelkreisfläche gleich.

I. Zusatz. Die krummen Oberflächen verschiedener Zonen und Kugelabschnitte sind gleich, wenn sie gleiche Höhen haben; im Gegentheile verhalten sie sich zu einander, wie ihre Höhen [1. und 2.].

II. Zusatz. Die Oberflächen zweier oder mehrerer Kugeln von verschiedenen Radien verhalten sich wie die Quadrate dieser Radien, nämlich wie

$$4R^2\pi : 4r^2\pi = R^2 : r^2.$$

III. Zusatz. (Fig. 46.) Die Oberfläche der Kugel verhält sich zur ganzen Oberfläche des darumbeschriebenen Cylinders ABCD (dessen Radius der Grundfläche $\equiv r$ und dessen Höhe $\equiv 2r$ ist), wie

$$4r^2\pi : 6r^2\pi = 4 : 6 = a : 3 \text{ [§. 60. Zus.].}$$

IV. Zusatz. (Fig. 32.) Da in der Ebene FDGE des grössten Kugelkreises

$DG^2 = DE \cdot DH$ [§. 88. Zus. I. eb. G.]

der Kugel ausgedrückt, wenn $M = 2r \cdot h$ ist, so ist auch

$$DG^2 \pi = 2r \pi h, \text{ d. h.}$$

die Fläche des Kreises, dessen Radius die Sehne der Kugel, vom Pole des Abschnittes bis an einen Punkt der Peripherie desselben, ist, gleicht der krummen Oberfläche dieses Abschnittes.

V. Zusatz. (Fig. 32. a) Die krumme Oberfläche des keilförmigen Kugelausschnittes ADBE ist, wenn r der Radius der Kugel und a der Neigungswinkel der in der Axe der Kugel sich schneidenden Ebenen ist, gleich

$$4 r^2 \pi \cdot \frac{a^\circ}{360^\circ}; \text{ denn es ist, wenn } S \text{ die krumme Oberfläche des Ausschnittes und } M \text{ die der Kugel ausdrückt,}$$

$$M : S = 360^\circ : a^\circ, \text{ daher } S = M \cdot \frac{a^\circ}{360^\circ} = 4r^2 \pi \frac{a^\circ}{360^\circ}.$$

VI. Zusatz. Aus dem Bisherigen in Vergleichung mit §. 97. eb. G. ergibt sich, dass sich die Oberflächen ähnlicher Körper – mit gleichen Körperwinkeln und gleich vielen ähnlichen Seitenflächen versehenen – wie die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten oder Dimensionen verhalten.

§. 65.

Aufgabe. (Fig. 46.) Man soll das Verhältniss der Oberfläche der Kugel zur ganzen Oberfläche des in der Kugel und des um dieselbe beschriebenen gleichseitigen Kegels HIK und EFG finden.

Auflösung. 1) Ist HIK der, in der Kugel beschriebene gleichseitige Kegel, d. h. ist $HI = HK = IK = p$, und $IN = r$, so ist

$$IK = p = r\sqrt{3} \text{ [§. 94. Zus. II. und §. 72. eb. G.]}$$

Es ist also die ganze Oberfläche des Kegels HIK oder $k = \frac{1}{2}p \pi [\frac{1}{2}p + p]$ [§. 61. Zus.],

$[C] = \frac{3}{4}p^2 \pi = \frac{9}{4}r^2 \pi$. Diese mit der Oberfläche der Kugel $4r^2 \pi$ verglichen, gibt, wenn M die Oberfläche der Kugel ausdrückt,

$M : k = 4r^2 \pi : \frac{9}{4}r^2 \pi = 16 : 9$, d. h. die Oberfläche der Kugel verhält sich zur ganzen Oberfläche des, in ihr beschriebenen, gleichseitigen Kegels, wie $16 : 9$.

2) Für den, um die Kugel construirten gleichseitigen Kegel EFG ist $EF = EG = FG = q$, und $IN = r$.

Da $IK \parallel FG$ und $NL = LM = \frac{1}{2}NM$ ist [§. 31. Zus. III. eb. G.] so ist $IK : FG = NL : NM$. oder

$$p : q = 1 : 2; \text{ also}$$

$$q = 2p = 2r\sqrt{3}. \text{ [Nro. 1.]}$$

Es ist also die ganze Oberfläche des, um die Kugel beschriebenen gleichseitigen Kegels EFG oder

$$K = \frac{1}{2}q\pi [q + p] = \frac{3}{4}q^2\pi \text{ [§. 61. Zus.]}$$

$$= 9r^2\pi, \text{ indem } q = 2r\sqrt{3} \text{ ist.}$$

Diese Oberfläche mit der Kugel M verglichen, gibt:

$$M : K = 4r^2\pi : 9r^2\pi = 4 : 9, \text{ d. h.}$$

die Oberfläche der Kugel verhält sich zur ganzen Oberfläche des, darum beschriebenen, gleichseitigen Kegels wie $4 : 9$.

Zusatz. Da nun aus dem Bisherigen

$$M : k = 16 : 9 \text{ [1.]}$$

und $M : K = 4 : 9 \text{ [2.]}$ ist, so ist auch

$$k : K = 4 : 16 = 1 : 4, \text{ d. h.}$$

der um die Kugel construirte gleichseitige Kegel ist der Oberfläche nach vier Mal so gross, als der in derselben beschriebene.

IV. Abschnitt.

Vergleichung der geometrischen Körper und Aehnlichkeit derselben.

A. Vergleichung der Prismen unter sich.

§. 66.

Lehrsatz. Zwei Prismen mit congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind congruent, wenn ihre Seitenflächen der Ordnung nach gleiche Neigungen gegen die Grundflächen haben, und in gleicher Ordnung liegen. —

Beweis. Man lege die congruenten Grundflächen so auf einander, dass sie sich decken, dann muss jedes Paar gleichnamiger Seitenflächen zusammenfallen, indem sie der Ordnung nach gleiche Neigungen gegen ihre Grundfläche haben. Ueberdiess fallen auch die Ebenen der entgegengesetzten Grundflächen zusammen, denn sie sind zu den auf einander gelegten parallel und gleichweit von ihnen entfernt; es müssen dann auch die Durchschnittslinien dieser letztern Ebenen und der Seitenflächen, mithin die entgegengesetzten Grundflächen selbst zusammen fallen. Es passt also das eine Prisma genau in das andere, und beide sind congruent.

I. Zusatz. Würfel sind congruent, wenn sie gleiche Seiten haben [Lehrs.], und gleich grosse Würfel haben gleiche Seiten.

II. Zusatz. Senkrechte Cylinder sind congruent, wenn ihre Grundflächen gleiche Durchmesser haben, und ihre Axen gleich sind [Lehrs.].

III. Zusatz. Wenn man eine Seite oder die Höhe eines Prisma in gleich grosse Theile theilt, und durch die Theilungspunkte Ebenen parallel zur Grundfläche legt, so wird dadurch das ganze Prisma in so viele congruente kleinere Prismen getheilt, als Theile vorhanden sind [Lehrs.]. Dasselbe gilt auch für den Cylinder.

§. 67.

Lehrsatz. Ein Parallelepipedon wird durch eine Ebene, die zwei gegenüberliegende Seitenflächen nach ihren Diagonalen schneidet, in zwei symetrische dreiseitige Prismen getheilt. (*)

Beweis. (Fig. 47.)

Thes ABCDEF symetrisch zu BCGFEH.

Daten. Da CB und EF Diagonalen von den congruenten Parallelogrammen AG und DH sind, so ist

$\triangle ABC \cong \triangle DEF \cong \triangle CBG \cong \triangle EFH$, und, da $AD \parallel CE \parallel BF \parallel GH$ und auch $AG \parallel DH$ ist, so sind die beiden Theile ABCDEF und BCGFEH des Parallelepipedon dreiseitige Prismen.

Man nehme beim einen dreiseitigen Prisma das $\triangle DEF$ und beim andern das $\triangle CBG$ als Grundflächen

(*) Sind die Winkel und Seiten eines Prisma denen eines zweiten gleich, ohne dass dieselben in einerlei Ordnung aufeinander folgen, so sind beide Prismen in allen ihren Theilen gleich, können aber nicht in einander gelegt werden und sind daher nur symetrisch gleich.

an. Diese sind nach Obigem congruent. Da $AG \# DH$ ist, so haben beide dreiseitigen Prismen gleiche Höhen. Auch haben ihre Seitenflächen der Ordnung nach gleiche Neigungen gegen ihre Grundflächen; denn, da $AG \# DH$ und $AE \# BH$ ist, so hat AE dieselbe Neigung gegen die Grundfläche DEF als BH gegen BCG . Dasselbe gilt von AF gegen die Grundfläche DEF und von CH gegen BCG , denn es ist $AF \# CH$. Da ferner die Parallelebenen AG und DH durch die Diagonalebene CF , welche beiden dreiseitigen Prismen zukömmt, geschnitten sind, so hat diese gegen die eine Grundfläche DEF dieselbe Neigung als gegen die andere BCG . Es muss also nach §. 58.

$ABCDEF$ symetrisch $BCGFEH$ sein.

I. Zusatz. (Fig. 47.) Ein dreiseitiges Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipedons, welches mit ihm dieselbe Höhe, aber eine doppelt so grosse Grundfläche hat; denn es ist

$$ABCDEF = BCGFEH = \frac{1}{2}DG. \text{ [Lehrs.]}$$

II. Zusatz. Ein rechtwinkliges Parallelepipedon kann durch eine Ebene, welche durch zwei gegenüberstehende Kanten geht, in zwei congruente dreiseitige Prismen zerlegt werden. —

§. 68.

Lehrsatz. Parallelepipeden mit einerlei Grundfläche und gleichen Höhen (d. i. wenn sie zwischen zwei Parallelebenen fallen) sind gleich gross.

Beweis. Hier ergeben sich zwei Hauptfälle:

I. entweder liegen die Parallelepipeden mit zwei Seitenflächen in einer Ebene (Fig. 48. 49. 50.),

II. oder nicht (Fig. 51.).

Jeder dieser Hauptfälle zerfällt in drei Nebenfälle und zwar:

- a) es liegen die beiden, den gemeinschaftlichen Grundflächen gegenüberstehenden Grundflächen zum Theile in einander,
- b) oder sie stoßen aneinander, oder
- c) sie fallen ganz auseinander. Daher:

Ad I. ad a) (Fig. 48.) Thes. $AH = GK$.

Daten. $CH = CH \# AM$

Man betrachte die beiden dreiseitigen Prismen AICELG und BKDFMH, dann ELG und FMH als ihre Grundflächen, so findet sich, weil auch $AG \# BH$ und $IG \# KH$ ist, dass

$AICELG = BKDFMH$ ist [§. 66.].

Nun ist $IBCDLFGH = IBCDLFGH$, mithin

$$AICELG + IBCDLFGH = BKDFMH + IBCDLFGH.$$

oder $AH = GK$.

ad b) (Fig. 49.) Thes. $AH = GI$.

Daten. $CH = CH \# AK$.

Es ist $ABCEFG = BCDFGH$ } [§. 67.], folgl.
and $BCDFGH = BIDFKH$

$$ABCEFG + BCDFGH = BCDFGH + BIDFKH,$$

oder $AH = GI$.

ad c) (Fig. 50.) Thes. $AH = GM$.

Daten. $GD = GD \# AK$.

Man betrachte die beiden dreiseitigen Prismen ACLEGI und BDMFHK, so wie EIG und FKH als ihre Grundflächen, so ist, da auch $AG \# BH$ und $LG \# MH$ ist,

ACLEGI = BDMFHK [§. 66.],
 nun ist BLNFIO = BLNFIO
 und NCDOGH = NCDOGH; folglich auch

$$\text{ACLEGI} - \text{BLNFIO} + \text{NCDOGH} = \text{BDMFHK} - \text{BLNFIO} + \text{NCDOGH},$$

oder $\text{AH} = \text{GM}.$

Ad II. Um den zweiten Hauptfall (Fig. 51.) zu beweisen, betrachte man AH mit GK. Es soll

Thes. $\text{AH} = \text{GK}$ sein.

Dat. $\text{EH} = \text{EH} \# \text{XY}.$

Man construire das Hilfs-Parallelepipedon GO, welches mit seinen verticalen Seitenflächen in die Ebenen der verticalen Seitenflächen des Parallelepipedon GK, und mit seinen horizontalen Seitenflächen in die Ebenen der horizontalen Seitenflächen des Parallelepipedon AH fällt. Es ist demnach:

$$\text{AH} = \text{GO} [\text{I. c.}]$$

$$\text{GO} = \text{GK} [\text{I. a.}],$$

mithin $\text{AH} = \text{GK}.$

I. Zusatz. Parallelepipeden von congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich; denn, legt man sie mit ihren congruenten Grundflächen zusammen, so ergibt sich ihre Gleichheit aus dem Lehrsatze, indem dann ihre beiden andern Grundflächen in eine zur ersteren parallele Ebene fallen müssen.

II. Zusatz. Alle dreiseitigen Prismen mit einerlei oder congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich; denn sie sind, nach §. 67. Zus. I., Hälften von Parallelepipeden mit derselben Höhe aber doppelter Grundfläche [Lehrs. und Zus. I.].

III. Zusatz. (Fig. 52.) Alle Prismen mit einerlei oder congruenten Grundflächen und gleichen Hö-

hen sind gleich; denn sie lassen sich durch gleichliegende Diagonalebene in dreiseitige zerlegen, welche einzeln der Ordnung nach gleich sind [Zus. II.], und wenn die Theile gleich sind, so sind es auch die Ganzen.

IV. Zusatz. Alle Cylinder mit einerlei oder congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich gross.

V. Zusatz. (Fig. 53.) Jedes schiefwinklige Parallelepipedon ist einem rechtwinkligen gleich, das mit ihm gleich grosse Grundfläche und Höhe, dann eine Seitenkante der Grundfläche gemein hat; d. i. $AF = AK$, wenn das Rechteck $AL =$ dem Rhomboide AH und $PF \# AH$ ist. Denn, stellt man auf die Grundfläche AH des schiefwinkligen Parallelepipedon AF die Seitenflächen PD , CH , MH und PI senkrecht, und erweitert man die Ebene BF bis sie diese senkrechten Seitenflächen schneidet, so entsteht das Parallelepipedon AG , welches Rechtecke zu Seitenflächen und das Rhombus AH zur Grundfläche hat; und es ist $AG = AF$ [Lehrs. II.].

Betrachtet man nun PD als Grundfläche des Parallelepipedon AG , und stellt man auf diese die Ebenen CL und PO senkrecht, erweitert sodann die Ebenen MH , PG und AH , bis sie diese senkrechten Ebenen schneiden, so entsteht wieder ein Parallelepipedon AK , dessen Grund- und Seiten-Flächen Rechtecke sind, und es ist

$$AK = AG \text{ [Lehrs. I. a.]}$$

Nun ist schon $AG = AF$ [Lehrs. II.],

$$\text{mithin } AK = AF.$$

Man kann demnach jedes schiefwinklige Parallelepipedon in ein gleiches rechtwinkliges verwandeln.

§. 69.

Lehrsatz. Wenn man ein Parallelepipedon durch eine Ebene, parallel mit einer Seitenfläche, schneidet, so verhalten sich die abgeschnittenen Stücke zu einander wie ihre Grundflächen.

Beweis. (Fig. 54.)

Thes. $AI : KF = AM : KH$.

Dat. $LM \# CG \# DH$.

Man messe AK und KB durch einerlei Mass, so wird sich finden, dass das gemeinschaftliche Mass, z. B. AN auf AK , m , und auf KB , n Mal aufgetragen werden kann, und es ist dann

$$AK : KB = m : n.$$

Durch das Auftragen von AN ist die Linie AK in m , und die Linie KB in n , unter sich gleiche, Theile getheilt. Legt man nun durch diese einzelnen Theilungspunkte, parallel zur Seitenfläche CG , Ebenen, so wird dadurch das Parallelepipedon AI in m , und das Parallelepipedon KF in n kleinere, unter sich congruente, Parallelepipedon getheilt [§. 66. Zus. III.], und es ist

$$AI : KF = m : n. \text{ Es ist aber}$$

$$AK : KB = m : n, \text{ folglich}$$

auch $AI : KF = AK : KB$. Nun ist

$$AK : KB = AM : KH \text{ [§ 76. Zus. eb. G.]}$$

mithin $AI : KF = AM : KH$.

Ist das Verhältniss $m : n$ nicht rational, so nehme

man das Mass AN so klein an, als nöthig ist, um sich dem rationalen Verhältnisse so viel möglich zu nähern. [Arithm.]

Zusatz. Wenn man ein Parallelepipedon durch eine Ebene parallel mit einer Seitenfläche durchschneidet, so verhält sich jeder Theil desselben zum ganzen Parallelepipedon, wie die Grundfläche des Theiles zu der des ganzen. Denn es ist aus obigem Lehrsatz

$$AI + KF : AI \text{ oder } KF = AM + KH : AM \text{ oder } KH,$$

$$\text{oder } AF : AI \text{ oder } KF = AH : AM \text{ oder } KH.$$

§. 70.

Lehrsatz. Rechtwinklige Parallelepipedon mit gleichen, obgleich unähnlichen, Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich.

Beweis. (Fig. 55.) Thes. $AF = LP$.

Daten. 1) Beide rechtwinklige Parallelepipedon AF und LP haben gleiche Höhen DB und QN, und gleiche Grundflächen, nämlich $AH = LO$. — Man erweitere die Ebenen CF, AD, AH und EH des Parallelepipedon AF über DF, DB, BH und FH hinaus, mache die Durchschnittslinie $BU = NO$, und schneide die erweiterten Ebenen durch eine, durch U parallel zu BF gelegte, Ebene RT; so ist BS ein Parallelepipedon.

2) Betrachtet man die Rechtecke BR und NP, so findet sich, dass $BR \cong NP$ ist, indem $BU = NO$ (Construct.) und $DB = QN$ [Daten 1.] ist.

3) Man erweitere nun die Ebenen DS, DH, BT und RT des Parallelepipedon BS über die Seiten DR, DB, BU und RU hinaus, mache die Durchschnittslinie $BW = NL$, und lege durch W, parallel mit BR, eine

Ebene WY, welche die so eben erweiterten Ebenen schneidet; dann ist WR wieder ein Parallelepipeton.

Da nun $BR \cong NP$ [2.] und $BW = NL$ [Constr.] ist, so muss $WR = LP$ [§. 68. Zus. I.] sein.

4) Indem, in den beiden Rechtecken WU und LO, $BU = NO$ und $BW = LN$ ist,

so muss $WU = LO$ sein. Nun
ist auch $AH = LO$ [Daten.], folglich

$$WU = AH.$$

5) Nach §. 69. ist:

$$AF : BS = AH : BT$$

$$\text{und } WR : BS = WU : BT.$$

$$\text{Daher } AF : WR = AH : WU.$$

Nun ist $AH = WU$ [4.], mithin muss
auch $AF = WR$ sein. Es ist aber
auch $WR = LP$ [3.], folglich

$$AF = LP.$$

I. Zusatz. Alle Parallelepipeden mit gleichen, obgleich unähnlichen, Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich. Denn, sind sie rechtwinklig, so sind sie, wie so eben gezeigt wurde, gleich. Ist eines davon schief, so verwandle man es [nach §. 68. Zus. V.] in ein rechtwinkliges; dieses ist dann dem schiefen [§. 68.], und dem andern senkrechten [Lehrs.], folglich auch dieses letzte dem schiefen Parallelepipeton gleich. Sind beide Parallelepipeden schief, so verwandle man beide [§. 68. Zus. V.] in rechtwinklige; alsdann sind beide rechtwinklige Parallelepipeden gleich [Lehrs.], auch ist jedes rechtwinklige dem dazu gehö-

rigen schiefen gleich [§. 68.]; also sind auch beide schiefe Parallelepipeden gleich gross.

II. Zusatz. Alle dreiseitigen Prismen mit gleichen, obgleich unähnlichen, Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich [Zus. I. und §. 67. Zus. I.].

§. 71.

Lehrsatz. Zwei rechtwinklige Parallelepipeden mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Beweis. (Fig 56.)

Thes. $GB : PK = GF : PO$.

Daten. 1) $CG = LP$. Man erweitere die Ebenen AD, AF, GF und CH des Parallelepipeden GB über BD, BF, FH und DH hinaus, mache das Rechteck HS (mit der Seite FH) so gross als PO, und schneide die erweiterten Ebenen durch eine durch U, parallel zu BH gelegte, Ebene UR. Dann ist HR ein Parallelepipedon und gleich gross mit PK [§. 70.].

2) Nach §. 69. ist:

$GB : HR = GF : HS$; also auch

$GB : PK = GF : PO$; denn es ist

$HR = PK$ und $HS = PO$ [1.].

I. Zusatz. Alle Parallelepipeden mit gleichen Höhen verhalten sich zu einander wie ihre Grundflächen. Für den Fall, dass beide zu vergleichenden Parallelepipeden rechtwinklig sind, bürgt der Lehrsatz. Ist aber eines von den Parallelepipeden, oder sind beide schiefwinklig, so verwandle man das eine oder beide zuerst in rechtwinklige [§. 68. Zus. V.], wo sich dann ihr Verhältniss aus dem Lehrsatze ergibt.

II. Zusatz. Alle dreiseitigen Prismen verhalten sich zu einander wie ihre Grundflächen, wenn sie gleiche Höhen haben [Zus. I. und §. 67. Zus. I.]

§. 72.

Lehrsatz. Jedes Prisma verhält sich zum dreiseitigen von gleicher Höhe wie die Grundfläche des ersteren zu der des zweiten.

Beweis. (Fig. 57.) Man bezeichne das mehrseitige Prisma ADFI durch M und das dreiseitige LPQ durch N, so wie des ersteren Grundfläche durch P und die des zweiten durch Q, so soll

Thes. $M : N = P : Q$ sein.

Daten. 1) Man zerlege das mehrseitige Prisma M durch die Diagonalebene BK, KC etc. in die dreiseitigen Prismen ABEFGK, BECGHK und CEDHKI, welche wir der Ordnung nach mit A, B und C, und ihre treffenden Grundflächen mit a, b und c bezeichnen wollen.

2) Es ist, da M und N, folglich auch A, B, C und N, gleiche Höhen haben, nach §. 71. Zus. II.

$$A : N = a : Q$$

$$B : N = b : Q$$

$$C : N = c : Q \text{ etc, folglich}$$

$$A + B + C : 3N = a + b + c : 3Q \text{ und}$$

$$A + B + C : N = a + b + c : Q, \text{ oder}$$

$$M : N = P : Q, \text{ indem}$$

$$A + B + C = M \text{ und } a + b + c = P \text{ ist.}$$

I. Zusatz. Jedes vielseitige Prisma ist einem dreiseitigen gleich, das mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat. Denn, ist in obiger Proportion [Lehrs.]

$P = Q$, d. h. ist die Grundfläche des mehrseitigen Prisma gleich der des dreiseitigen, so muss auch $M = N$ sein.

II. Zusatz. Alle Prismen, die gleiche Grundflächen und Höhen haben, sind gleich gross [Zus. I. und §. 70. Zusatz II.].

III. Zusatz. Jeder Cylinder ist einem Prisma gleich, das mit ihm gleich grosse Grundfläche und Höhe hat. [Zus. II.]

IV. Zusatz. Jedes Prisma und jeder Cylinder ist einem Parallelepipedon mit gleich grosser Grundfläche und Höhe gleich [Zus. II. und III.].

V. Zusatz. Alle Prismen und Cylinder mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen [Zus. IV. und §. 71. Zus. I.].

B. Vergleichung der Pyramiden unter sich und mit Prismen.

§. 73.

Lehrsatz. Wenn man eine Pyramide durch eine oder mehrere Ebenen parallel zur Grundfläche schneidet, so verhalten sich die Durchschnittenfiguren wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze.

Beweis. (Fig. 31.) Man fälle von der Spitze A die Senkrechte AF, so soll:

Thes. $bd : BD = Af^2 : AF^2$ sein.

Dat. 1) Es ist $bd \parallel BD$, folglich $bd \propto BD$ [§. 53.].

Dann ist auch

$bd : BD = bc^2 : BC^2$.

2) Legt man durch A, B und F eine Ebene, so ist $bf \parallel BF$ [§. 18.], folglich:

$Af : AF = Ab : AB$, auch
ist $bc : BC = Ab : AB$

Mithin $Af : AF = bc : BC$ und

$Af^2 : AF^2 = bc^2 : BC^2$. Es ist aber

$bd : BD = bc^2 : BC^2$ [1.]; folglich

$bd : BD = Af^2 : AF^2$.

I. Zusatz. Wenn man einen Kegel parallel zur Grundfläche durch eine oder mehrere Ebenen schneidet, so verhalten sich die Durchschnittenfiguren wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze. — Auch ist die oben abgeschnittene Pyramide der ganzen ähnlich. Dasselbe gilt für den Kegel.

II. Zusatz. Eine abgekürzte Pyramide kömmt einem Prisma von derselben Grundfläche und Höhe um so näher, je kleiner ihre Höhe ist. Denn es ist [Fig. 31.] $bd : BD = Af^2 : AF^2$; je kleiner nun ff , die Höhe der abgekürzten Pyramide ist, desto näher kömmt Af dem AF , d. i. das Verhältniss $Af : AF$, mithin auch $Af^2 : AF^2$ oder $bd : BD$, nähert sich immer mehr dem Verhältnisse der Gleichheit $1 : 1$, und beide ähnlichen Grundflächen der abgekürzten Pyramide sind immer weniger an Grösse unterschieden, die Seitentrapeze nähern sich immer mehr Parallelogrammen, mithin auch die abgekürzte Pyramide selbst einem Prisma mit derselben Grundfläche und Höhe.

III. Zusatz. Ein abgekürzter Kegel kömmt einem Cylinder von derselben Grundfläche und Höhe um so näher, je kleiner seine Höhe ist [Zus. II.].

IV. Zusatz. Die abgekürzte Pyramide, deren

Höhe unendlich klein ist, verwandelt sich in ein Prisma von derselben Grundfläche und Höhe. Denn die beiden Grundflächen sind congruent, die Seitenflächen Parallelogramme [Zusatz H.], folglich der Körper ein Prisma. Eben desswegen ist auch ein abgekürzter Kegel, dessen Höhe unendlich klein ist, einem Cylinder von derselben Grundfläche und Höhe gleich.

V. Zusatz. (Fig. 58.) Haben zwei Pyramiden ABCD und MNOQ gleich grosse Grundflächen und Höhen, so sind auch jene zwei zu den Grundflächen parallele Durchschnitten gleich gross, welche von den Spitzen der Pyramiden gleichweit abstehen, d. i. $\triangle bcd = np$, wenn $\triangle BCD = NP$, und $AE = MR$, $Ae = Mr$, dann $bcd \# BCD$ und $np \# NP$ ist. Denn es ist hier:

$$\triangle BCD : \triangle bcd = AE^2 : Ae^2 \quad [\text{Lehrs.}]$$

$$NP : np = MR^2 : Mr^2.$$

Nun ist $AE = MR$, $Ae = Mr$ [Vorausss.],

also auch $AE^2 = MR^2$ und $Ae^2 = Mr^2$, mithin

$$\triangle BCD : \triangle bcd = NP : np, \text{ und, weil}$$

$$\triangle BCD = NP \text{ [Vorrauss.] ist, so muss auch}$$

$$\triangle bcd = np \text{ sein.}$$

S. 74.

Lehrsatz. (Fig. 58.) Alle Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich.

Beweis.

Thes. $ABCD = MNP$.

Daten. $\triangle BCD = NP$ und $AE = MR$.

Man stelle sich die beiden Höhen AE und MR in unendlich viele gleiche Theile getheilt, und durch alle

Theilungspuncte zur Grundfläche parallele Ebenen vor; so bestehen beide Pyramiden aus unendlich vielen abgekürzten Pyramiden, welche Prismen gleich sind [§. 73. Zus. IV.]. Diese kleinen Prismen haben der Ordnung nach gleich grosse Grundflächen [§. 73. Zus. V.] und gleiche Höhen, mithin ist das erste Prisma der einen Pyramide dem ersten der andern, das zweite der einen dem zweiten der andern etc. gleich [§. 72. Zus II.]. Nun bestehen die beiden Pyramiden aus gleich vielen solchen der Ordnung nach gleichen Prismen; es muss also die Summe aller Prismen der einen Pyramide der Summe aller Prismen der andern, folglich auch die eine Pyramide der andern gleich sein, d. i. $ABCD = MNP$.

Zusatz. Jeder Kegel ist einer Pyramide gleich, die mit ihm gleich grosse Grundfläche und Höhe hat [Lehrs.].

§. 75.

Lehrsatz. Mehrere Pyramiden $P, p, \pi \dots$ mit der gleichen Höhe H und mit den Grundflächen B, b, β , sind zusammen einer Pyramide M gleich mit derselben Höhe H und der Grundfläche Q , welche der Summe jener Grundflächen $B, b, \beta \dots$ gleich ist.

Beweis.

Thes. $M = P + p + \pi \dots$

Dat. $H = H$ und $Q = B + b + \beta + \dots$

Man zerlege die Grundfläche Q der Pyramide M in ihre Theile B, b, β , etc. $\dots$ — Durch die Spitze der Pyramide M und durch jede der Theilungslinien der Grundfläche lege man Ebenen, so wird dadurch diese Pyramide in eben so viele kleinere Pyramiden getheilt,

als die Grundfläche Q Theile hat. Diese einzelnen Pyramiden haben eine gemeinschaftliche Spitze, folglich alle die Höhe H ; die erste davon hat mit der Pyramide P , die zweite mit der Pyramide p , die dritte mit der Pyramide π etc. gleich grosse Grundfläche und Höhe, sie sind also je zwei und zwei einander gleich [§. 74.]: es müssen demnach auch die ersteren zusammen genommen der Summe der letzteren gleich sein,

$$\text{d. i. } M = P + p + \pi \dots$$

Zusatz. Mehrere Kegel von gleichen Höhen sind zusammen einem Kegel oder einer Pyramide mit derselben Höhe gleich, wovon die Grundfläche der Summe der Grundflächen der einzelnen gleicht.

§. 76.

Lehrsatz. Die dreiseitige Pyramide ist der dritte Theil eines dreiseitigen Prisma mit derselben Grundfläche und Höhe.

Beweis. (Fig. 59.)

Thes. $\text{Pyr. BDEF} = \frac{1}{3} \text{Prism. AEF.}$

Daten. 1) Man lege im Prisma AEF durch B, D und F, dann durch B, C und D Ebenen, so wird dadurch das Prisma in die drei Pyramiden BDEF, ABCD und BCDF zertheilt, von welchen die ersteren zwei mit dem Prisma dieselbe Grundfläche und Höhe haben, daher $\text{BDEF} = \text{ABCD}$ ist [§. 74.].

2) Nimmt man bei der Pyramide ABCD das $\triangle ADC$ und bei der Pyramide BCDF das $\triangle DCF$ als Grundflächen an, so ist B ihre gemeinschaftliche Spitze,

sie haben also gleiche Höhen und gleiche Grundflächen [§. 45. Zus. II. eb. G.], mithin ist auch

$$BCDF = ABCD \text{ [§. 74.]}$$

Es ist aber $BDEF = ABCD$ [1.]; folglich

$$BCDF = ABCD = BDEF, \text{ also auch}$$

$$\text{Pyr. BDEF} = \frac{1}{3} \text{ Prism. AEF.}$$

I. Zusatz. Jede Pyramide p ist überhaupt der dritte Theil eines jeden Prisma P , welches mit ihr gleiche Höhe H und Grundfläche B hat, oder $p = \frac{1}{3} P$. Denn, wenn m eine dreiseitige Pyramide und M ein dreiseitiges Prisma von der Höhe H und der Grundfläche B bezeichnen; so ist $M = P$ [§. 72. Zus. II.], $m = p$ [§. 74.], $m = \frac{1}{3} M$ [Lehrs.], folglich $p = \frac{1}{3} M = \frac{1}{3} P$.

II. Zusatz. Jeder Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat [Zus. I.]

§. 77.

Lehrsatz. Prismen von gleich grossen Grundflächen verhalten sich zu einander wie ihre Höhen.

Beweis. (Fig. 60.)

$$\text{Thes. Prism. AEF : Prism. GN} = H : h.$$

$$\text{Daten. 1) } \triangle DEF = LN, AD = H, GL = h.$$

Man messe die Höhen H und h durch einerlei Mass z. B. durch AD , so wird sich finden, dass dieses Mass auf H , m und auf h , n Mal aufgetragen werden kann, und es muss

$$H : h = m : n \text{ sein.}$$

2) Durch dieses Auftragen wird H in m und h in n gleiche Theile getheilt. Man lege durch diese Thei-

lungspuncte, parallel zur Grundfläche, Ebenen, so wird dadurch das Prisma AEF in m und das Prisma GN in n kleinere Prismen getheilt, welche alle unter sich gleich sind [§. 72. Zus. II.], denn sie haben gleich grosse Grundflächen und Höhen. Es muss also auch

$$\text{Prism. AEF} : \text{Prism. GN} = m : n, \text{ und da auch}$$

$$H : h = m : n \text{ [I.] ist,}$$

so muss $\text{Prism. AEF} : \text{Prism. GN} = H : h$ sein.

Ist das Verhältniss $m : n$ irrational, so nehme man das Mass aD so klein an, als nöthig ist, um sich dem rationalen Verhältnisse so viel, als nur möglich ist, zu nähern [Arithm.].

I. Zusatz. Alle Parallelepipeden und Cylinder von gleichen Grundflächen verhalten sich zu einander wie ihre Höhen. [Lehrsatz und §. 72. Zus. II. und III.]

II. Zusatz. Alle Pyramiden und Kegel von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen [Lehrs., und §. 76. Zus. I. und II.].

III. Zusatz. Rechtwinklige Parallelepipeden mit gleichen Längen und Breiten, verhalten sich zu einander wie ihre Höhen; denn rechtwinklige Parallelepipeden, deren Längen und Breiten gleich sind, haben eben desswegen gleiche Grundflächen. [Lehrs.]

IV. Zusatz. Rechtwinklige Parallelepipeden mit gleichen Längen und Höhen verhalten sich zueinander wie ihre Breiten [Zus. III.]; denn man kann bei jedem rechtwinkligen Parallelepipeden die drei Dimensionen verwechseln, und, was im Parallelepipeden des vorigen Zusatzes Breite war, nun als Höhe, und was Höhe war, nun als Breite betrachten.

V. Zusatz. Rechtwinklige Parallelepipeden mit

gleichen Breiten und Höhen verhalten sich wie ihre Längen [Zus. III.]; denn man kann in den Parallelepipeden des III. Zusatzes die Länge mit der Höhe verwechseln.

§. 78.

Lehrsatz. Rechtwinklige Parallelepipeden verhalten sich zu einander wie die Producte aus ihren Längen, Breiten und Höhen.

Beweis. Gesetzt A und B seien die Parallelepipeden, L, B, H des ersteren und l, b, h des letzteren Länge, Breite und Höhe, so ist zu zeigen, dass

Thes. $A : B = L \cdot B \cdot H : l \cdot b \cdot h$ ist.

Daten. Man wähle ein Hilfsparallelepipedon C, welches l, B, H und noch ein zweites D, welches l, b, H zur Länge, Breite und Höhe hat. Es ist:

$$A : C = L : l \text{ [§. 77. Zus. V.]}$$

$$C : D = B : b \text{ [§. 77. Zus. IV.]}$$

$$D : B = H : h \text{ [§. 77. Zus. III.]}$$

Mithin $A \cdot C \cdot D : B \cdot C \cdot D = L \cdot B \cdot H : l \cdot b \cdot h$ und

$$A : B = L \cdot B \cdot H : l \cdot b \cdot h.$$

I. Zusatz. Alle rechtwinkligen Parallelepipeden verhalten sich zu einander, wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen, d. i.

$$A : B = \text{Basis} \times H : \text{basis} \times h.$$

Denn es gibt das Product aus der Länge und Breite, oder L · B, die Grundfläche [Basis] des einen, und l · b die Grundfläche [basis] des anderen Parallelepipeden. Da nun $A : B = L \cdot B \cdot H : l \cdot b \cdot h$ [Lehrs.] ist, so muss auch $A : B = \text{Basis} \times H : \text{basis} \times h$ sein.

II. Zusatz. Alle Parallelepipeden, Prismen und Cylinder verhalten sich zu einander wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen [Zus. I. dann §. 68. Zus. V. und §. 72. Zus. IV.].

III. Zusatz. Alle Pyramiden und Kegel verhalten sich wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen [§. 76. Zus. I. und II.]. Sind letztere gleich, so verhalten sich die Pyramiden und Kegel wie ihre Grundflächen, und sind erstere d. i. die Grundflächen gleich, wie ihre Höhen.

§. 79.

Lehrsatz. Jede Kugel ist dem körperlichen Inhalte nach einer Pyramide gleich, welche die Oberfläche der Kugel zur Grundfläche und den Radius derselben zur Höhe hat.

Beweis. Man denke sich die Oberfläche der Kugel in eine Menge unendlich kleiner Dreiecke getheilt, welche einzeln als ebene Figuren angesehen werden können, deren Entfernung vom Mittelpunkte der Kugel der Radius ist. Betrachtet man diese Dreiecke als die Grundflächen von Pyramiden, deren Spitzen in dem Mittelpunkte der Kugel sich befinden; so ergibt sich, dass die Kugel zusammengesetzt ist aus einer unendlich grossen Anzahl von Pyramiden, deren Grundflächen unendlich kleine Theile der Oberfläche der Kugel und deren Höhe der Radius ist. Da alle diese Pyramiden gleiche Höhen haben, so gleichen sie zusammen einer Pyramide, deren Grundfläche die Summe der Grundflächen der einzelnen Pyramiden, d. i. die ganze Oberfläche der Kugel, und deren Höhe der Radius der Ku-

gel ist [§. 75.]. Es muss also die Kugel selbst dieser Pyramide gleichen.

Zusatz. Ein Kugelausschnitt (Sector) ist seinem körperlichen Inhalte nach einer Pyramide gleich, deren Grundfläche die krumme Oberfläche des Sector's und deren Höhe der Radius der Kugel ist [Lehrs. und §. 75.].

C. Aehnlichkeit der Körper.

§. 80.

Erklärung. Zwei ebene Körper (Polyëder) heissen überhaupt dann ähnlich, wenn sie der Ordnung nach gleich viele ähnliche Begränzungsflächen und congruente körperliche Winkel haben, und ihre gleichliegenden Kanten, so wie alle gleichliegenden Dimensionen in Proportion stehen. Durch homologe Diagonalebenen kann man sich solche ähnliche Körper in ähnliche dreiseitige Pyramiden in gleicher Ordnung zerlegt denken.

I. Zusatz. Alle gleichnamigen regulären geometrischen Körper sind ähnlich.

II. Zusatz. Alle Kugeln sind ähnlich, denn man kann sich selbe als ähnliche Polyëder von unendlich vielen ähnlichen Seitenflächen vorstellen.

III. Zusatz. Alle senkrechten Cylinder sind ähnlich, wenn ihre Axen sich verhalten wie die Radien oder Diameter ihrer Grundflächen. Bei derselben Bedingung heissen auch zwei Kegel ähnlich.

§. 81.

Lehrsatz, Zwei ähnliche Prismen verhalten sich

am körperlichen Inhalte zu einander, wie die Cubiczahlen (Cubuse) zweier gleichnamigen Seiten oder Dimensionen.

Beweis. Man setze die beiden ähnlichen Prismen seien P und p , ihre Grundflächen B und b , ein Paar homologe Seiten oder Dimensionen derselben A und a , dann ihre Höhen H und h ; so ist

Thes. $P : p = A^3 : a^3$; denn

Daten. 1) Es ist $P : p = B.H : b.h$ [§. 78. Z. II.].

2) Auch ist $B : b = A^2 : a^2$ [§. 97. eb. G.]

und $H : h = A : a$,

folglich $BH : bh = A^3 : a^3$; da aber

$P : p = BH : bh$ [1.] ist, so

muss auch $P : p = A^3 : a^3$ sein.

I. Zusatz. Aus der Proportion des Lehrsatzes,

$P : p = A^3 : a^3$, ist auch

$\sqrt[3]{P} : \sqrt[3]{p} = A : a$, d. h. die homologen Seiten oder Dimensionen zweier ähnlichen Prismen verhalten sich zu einander wie die Cubicwurzeln aus den Zahlen, welche die körperlichen Räume der Prismen ausdrücken. Wäre also z. B.

$P : p = 2 : 1$; so müsste auch

$A : a = \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{1}$, oder

$A : a = \sqrt[3]{2} : 1$, folglich

$A = a\sqrt[3]{2}$ sein.

Gesetzt, a wäre die Seite eines Würfels $p = 1$ (als Einheit betrachtet), so wäre die Seite eines Würfels $P = 2$, von doppeltem Inhalte, nämlich $A = a\sqrt[3]{2}$ eine irrationale Zahlengrösse, weil $\sqrt[3]{2}$ irrational ist. Arithmetisch lässt sich also ein Würfel verdoppeln, d. h. die Seite desselben $a\sqrt[3]{2}$ beliebig weit annähernd be-

rechnen, aber geometrisch, genau durch eine Construction der elementaren Geometrie, kann man diese Seite $a\sqrt{2}$ nicht erhalten.

II. Zusatz. Aehnliche Cylinder verhalten sich zu einander wie die Cubiczahlen der Radien oder Durchmesser ihrer Grundflächen [Lehrs.]; denn, wenn die Grundflächen $B = R^2\pi$ und $b = r^2\pi$ sind, so ist:

$$B : b = R^2\pi : r^2\pi$$

$$H : h = R : r; \text{ mithin}$$

$$BH : bh = R^3\pi : r^3\pi, \text{ da}$$

$$\text{auch } BH : bh = \text{Cyl} : \text{cyl.} [\S. 78. \text{Zus. II.}] \text{ ist,}$$

$$\text{so muss } \text{Cyl.} : \text{cyl} = R^3\pi : r^3\pi$$

$$= R^3 : r^3 \text{ sein.}$$

III. Zusatz. Aehnliche Pyramiden und Kegel verhalten sich zueinander, wie die Cubiczahlen homologer Seiten oder Dimensionen.

§. 82.

Lehrsatz. Allgemein verhalten sich zwei ähnliche Körper (Polyëder) am körperlichen Inhalte zu einander, wie die Cubiczahlen ihrer homologen Seiten, Kanten oder Dimensionen.

Beweis. Man kann sich zwei ähnliche Polyëder durch homologe Diagonalebene in gleichviele ähnliche dreiseitige Pyramiden zerlegt vorstellen. Nun verhalten sich je zwei dieser ähnlichen Pyramiden, gleichwie die Cubiczahlen von je zwei homologen oder ähnlich liegenden Seiten oder Dimensionen. Sind zwei solche ähnliche Pyramiden P und p , die zugehörigen homologen Dimensionen S und s , so ist

$$P : p = S^3 : s^3 [\S. 81. \text{Zus. III.}].$$

Eben dieses Verhältniss gilt offenbar für je zwei andere ähnliche Pyramiden, als Theile der Polyëder, also auch für die Summen der ähnlichen Pyramiden, nämlich für die ähnlichen Polyëder selbst. Sind nun zwei ähnlich liegende oder homologe Seiten derselben S und s , so verhält sich das eine Polyëder zum zweiten ähnlichen, wie $S^3 : s^3$.

Zusatz. Alle Kugeln verhalten sich, ihrem körperlichen Inhalte nach, wie die Cubuse ihrer Radien oder Durchmesser.

V. Abschnitt.

Berechnung des körperlichen (cubischen) Inhaltes der geometrischen Körper.

§. 83.

Erklärungen. 1. Das Mass eines Körpers ist ebenfalls ein Körper, das gewöhnlichste der Cubicfuss, d. i. ein Cubus oder Würfel, wovon jede Seite einen Fuss misst. Man theilt den Cubic-Fuss

A) nach der Decimaleintheilung in 1000 Cubic-Zoll, jeden Cubic-Zoll in 1000 Cubic-Linien, und jede Cubic-Linie in 1000 Cubic-Scrupel. 1000 Cubic-Fuss geben eine Decimalcubic-Ruthe.

B) nach der Duodecimaleintheilung in 1728 Cubic-Zoll, jeden solchen Cubic-Zoll in 1728 Cubic-Linien und jede solche Cubic-Linie in 1728 Cubic-Scrupel. 1728 Cubic-Fuss geben eine Duodecimalcubic-Ruthe.

Man bezeichnet Cubicruthen durch c° , Cubic-Schuh durch c' , Cubic-Zoll durch c'' , Cubic-Linien durch c''' , und Cubic-Scrupel durch c'''' , welche Zeichen man rechts über die Zahlen setzt. So heisst z. B. 20° 236' 52'' etc., 20 Cubic-Ruthen, 236 Cubic-Fuss, 52 Cubic-Zoll etc.

2. Folgende Tabellen gewähren eine

Allgemeine Uebersicht über das Körpermass.

a. Decimalmass.

Cub.-Fuss.	Cub.-Zoll.	Cub.-Linien.	Cub.-Scrup.
1.	1000.	1000000.	1000000000.
	1.	1000.	1000000.
		1.	1000.

b. Duodecimalmass.

Cub.-Fuss.	Cub.-Zoll.	Cub.-Linien.	Cub.-Scrup.
1.	1728.	2985984.	5159780352.
	1.	1728.	2985984.
		1.	1728.

3. Einen Körper berechnen heisst, angeben, wie oft das Mass in ihm enthalten ist, oder wie viel Cubic-Ruthen, Cubic-Fuss etc. derselbe enthält.

4. Bei dem neuen französischen Masse ist das Grundmass für den cubischen Inhalt fester Körper der Cubic-Mètre (mètre cube), Stère genannt. Der Cubic-Mètre enthält 1000 Cubic-Decimètres, oder 1000000 Cubic-Centimètres, oder 1000000000 Cubic-Millimètres. — Für flüssige Körper ist das Grundmass das Litre, gleich gross mit dem Cubic-Decimètre.

Hier herrscht folgende Eintheilung:

Ein Kilolitre od. 1000 Litres = 1 Cub. Mètre.

„ Hectolitre „ 100 „ = 0,1 „ „
 „ Décalitre „ 10 „ = 0,01 „ „
 „ Litre „ 1 „ = 0,001 „ = 1 Cub. Decim.
 „ Décilitre „ 0,1 „ = 0,0001 „ = 0,1 „ „
 „ Centilitre „ 0,01 „ = 0,00001 „ = 0,01 „ „
 „ Millilitre „ 0,001 „ = 0,000001 „ = 0,001 „ = 1
 1 Cub. Centim.

§. 84.

Aufgaben. 1) Man soll $40^c' 216^{c''}$ Duodecimalmass im Decimalmass verwandeln.

Auflösung. Da der Cubicfuss für das Decimalmass derselbe ist, wie für das Duodecimalmass, so braucht man bloss die $216^{c''}$ in Decimalmass zu verwandeln. Es ist

$$1728 : 1000 = 216^{c''} : x \quad [\text{§. 83.}]$$

$$\text{Mithin } x = \frac{216000}{1728} = 125^{c''} \text{ Decimalmass.}$$

Es geben also $40^c' 216^{c''}$ Duodecimalmass im Decimalmass $40^c' 125^{c''}$.

2) Was geben $2^{c^0} 8^c' 9^{c''}$ Decimalmass im Duodecimalmass?

Auflösung. Man verwandle zuerst $2^{c^0} 8^c'$ in Duodecimalmass. Es ist nämlich das Decimalmass $2^{c^0} 8^c' = 2008^c' = 1^{c^0} 280^c'$ Duodecimalmass. Nun verwandle man die $9^{c''}$ in Duodecimalmass. Nämlich:

$$1000 : 1728 = 9^{c''} : x \quad [\text{§. 83.}], \text{ woraus}$$

$$x = 15,552^{Dd.c''}$$

$$= 15^{c^0} 953^{c''} 1479,2^{c'''} \text{ Duod. M.}$$

Es geben also $2^{\circ} 8^{\prime} 9^{\prime\prime}$ Decimalmass im Duodecimalmasse ausgedrückt $1^{\circ} 280^{\prime} 15^{\prime\prime} 953^{\prime\prime\prime} 1479,2^{\prime\prime\prime\prime}$.

3) Man soll $3^{\circ} 26^{\prime} 42^{\prime\prime} 130^{\prime\prime\prime}$ Decimalmass in Duodecimalmass verwandeln.

Auflösung. Man verwandle wieder zuerst die Ruthen und Schuh in das Duodecimalmass d. i.

das Decimalmalm. $3^{\circ} 26^{\prime} = 3026^{\prime} = 1^{\circ} 1298^{\prime}$
Duodecimalmass.

Nun verwandle man die gegebenen $42^{\prime\prime} 130^{\prime\prime\prime}$ in Duodecimalmass, nachdem man zuerst alles auf die kleinste Benennung gebracht hat. Es sind nämlich $42^{\prime\prime} 130^{\prime\prime\prime} = 42130^{\prime\prime\prime}$, ferner

$$1000000 : 2985984 = \overset{\text{D. c}^{\prime\prime\prime}}{42130} : \overset{\text{Dd. c}^{\prime\prime\prime}}{x} \text{ [§. 83.]}$$

$$\text{Daher } x = 125799,50592^{\prime\prime\prime} \text{ Dd. Mass.}$$

$$= 72^{\prime\prime} 1383,50592^{\prime\prime\prime}$$

$$= 72^{\prime\prime} 1383^{\prime\prime\prime} 874,2^{\prime\prime\prime\prime}$$

Es geben also $3^{\circ} 26^{\prime} 42^{\prime\prime} 130^{\prime\prime\prime}$ Decimalmass im Duodecimalmasse ausgedrückt $1^{\circ} 1298^{\prime} 72^{\prime\prime} 1383^{\prime\prime\prime} 874,2^{\prime\prime\prime\prime}$.

4) Was geben $6^{\circ} 210^{\prime} 236^{\prime\prime} 700^{\prime\prime\prime}$ Duodecimalmass im Decimalmasse?

Auflösung. Es ist

$$\text{das Duodecimalm. } 6^{\circ} 210^{\prime} = 10578^{\prime} = 10^{\circ} 578^{\prime} \text{ D.M.}$$

$$\text{Ferner sind } 236^{\prime\prime} 700^{\prime\prime\prime} = 408508^{\prime\prime\prime} \text{ und}$$

$$2985984 : 1000000 = \overset{\text{Dd. c}^{\prime\prime\prime}}{408508} : \overset{\text{D. c}^{\prime\prime\prime}}{x} \text{ [§. 83.]}$$

$$\text{Daher } x = \frac{408508000000}{2985984} = 136808,5026^{\prime\prime\prime\prime} \text{ Dec. M.}$$

$$= 136^{\prime\prime} 808^{\prime\prime\prime} 502,6^{\prime\prime\prime\prime}, \text{ oder}$$

$$= 136^{\prime\prime} 808^{\prime\prime\prime} 503^{\prime\prime\prime\prime} \text{ Dec. Mass.}$$

Es geben demnach $6^{\circ} 210^{\prime} 236^{\prime\prime} 700^{\prime\prime\prime}$ Duode-

cimalmass im Decimalmasse $10^{\circ} 578^{\circ} 136^{\circ} 808^{\circ}$
 503° .

5) Man soll 176° Duodecimalmass in Decimalmass verwandeln.

Auflösung. Es ist

$$1000 : 1728 = 176^{\circ} : x^{\circ} \quad [\text{§. 83.}]$$

$$\text{und } x = 304,128^{\circ} \text{ Dec. Mass.}$$

$$= 304^{\circ} 128^{\circ} \text{ „ „}$$

Aufgaben zur Uebung.

1) Was geben 108° Duodecimalmass im Decimalmasse? Antw. $186^{\circ} 624^{\circ}$.

2) Es sollen $14^{\circ} 3^{\circ} 87^{\circ} 793^{\circ}$ Decimalmass in Duodecimalmass verwandelt werden. — Sie geben im Duodecimalmasse $8^{\circ} 179^{\circ} 151^{\circ} 1220^{\circ} 852,4^{\circ}$.

3) Man soll $3^{\circ} 80^{\circ} 1340^{\circ}$ Duodecimass in Decimalmass verwandeln. Man erhält $5^{\circ} 264^{\circ} 775^{\circ} 462^{\circ} 963^{\circ}$.

§. 85.

Aufgabe. Ein rechtwinkliges Parallelepipedon zu berechnen.

Auflösung. Man messe die Länge, Breite und Höhe des zu berechnenden Parallelepipedon mit einerlei Mass z. B. Fuss etc., und multiplicire diese drei Zahlenwerthe; oder man multiplicire die Grundfläche des Parallelepipedon mit seiner Höhe.

Beweis. (Fig. 61.) 1) Gesetzt AG sei das zu berechnende rechtwinklige Parallelepipedon, L, B, und H seine Länge, Breite und Höhe. Man vergleiche es mit

dem Cubicfuss ag, worin Länge, Breite und Höhe, $l = b = h = 1$ ist. Nach §. 78. ist:

$$\begin{aligned} ag : AG &= l \cdot b \cdot h : L \cdot B \cdot H. \\ &= 1 : L \cdot B \cdot H. \\ &= 1 : \text{Basis} \times H, \text{ (denn es ist} \end{aligned}$$

$L \cdot B = \text{Basis}$); d. h. der Cubicfuss ag ist so oft im Parallelepipedon AG enthalten, als die Einheit im Producte aus der Grundfläche und Höhe. Man findet also den körperlichen Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedon, wenn man seine Länge, Breite und Höhe durch einerlei Mass misst, und diese drei Zahlenwerthe multiplicirt, oder wenn man das Mass der Grundfläche mit dem Masse der Höhe des Parallelepipedon multiplicirt.

I. Zusatz. Jedes Parallelepipedon wird berechnet, indem man seine Grundfläche und Höhe mit einander multiplicirt. Denn jedes schiefwinklige Parallelepipedon gleicht einem rechtwinkligen mit gleich grosser Grundfläche und Höhe [§. 68. Zus. V.]. Da man nun ein rechtwinkliges Parallelepipedon durch das Product aus Grundfläche und Höhe berechnet [Aufg.], so gilt dieses auch von allen übrigen Parallelepipedon, indem die Grösse der in Rechnung kommenden Factoren stets dieselbe bleibt.

II. Zusatz. Ein Cubus oder Würfel wird berechnet, indem man das Mass einer Seite desselben zum Cubus erhebt [Aufg.].

§. 86.

Aufgabe. Jedes Prisma zu berechnen.

Auflösung. Man multiplicire die Grundfläche des Prisma mit seiner Höhe.

Beweis. Jedes Prisma gleicht einem Parallelepi-
pedon mit gleich grosser Grundfläche und Höhe [§. 72.
Zus. IV.]. Dieses wird berechnet, indem man die Grund-
fläche mit der Höhe multiplicirt [§. 85. Zus. I.]; folglich
gilt dieses auch für alle Prismen.

Zusatz. Da der senkrechte Cylinder ein Prisma
mit einem Kreise zur Grundfläche ist, so ist sein Inhalt
 $M = r^2\pi h$ (oder $\frac{1}{4}d^2\pi h$), wenn r den Radius der
Grundfläche und h die Höhe des Cylinders ausdrückt
[Aufg.].

§. 87.

Aufgabe. Jede Pyramide zu berechnen.

Auflösung. Man multiplicire die Grundfläche
der Pyramide mit ihrer Höhe, und dividire das Product
durch drei.

Beweis. Jede Pyramide ist der dritte Theil eines
Prisma, das mit ihr gleich grosse Grundfläche und
Höhe hat [§. 76. Zus. I.]. Jedes Prisma wird berech-
net, indem man Grundfläche und Höhe multiplicirt;
folglich findet man auch den körperlichen Inhalt jeder
Pyramide, indem man das Product aus der Grundfläche
in die Höhe durch drei dividirt.

Zusatz. Der cubische Inhalt eines jeden senk-
rechten Kegels ist $= \frac{1}{3}r^2\pi h$ (oder $\frac{1}{12}d^2\pi h$) [Aufg. §. 51.
4. und §. 76. Zus. II.].

§. 88.

Aufgaben. 1) Ein Prisma dessen Grundfläche
 $16\text{'}\square\text{'}$ $7\text{'}\square\text{'}$, und dessen Höhe 25' misst, soll berechnet
werden.

Auflösung. Es ist, nach §. 86., wenn B die Grundfläche und H die Höhe des Prisma ausdrückt, das Prisma oder $M = B \cdot H$

$$= 16,07 \cdot 25$$

$$= 401,75^{\circ}$$

$$= 401^{\circ} 750^{\circ\prime\prime}.$$

2) Ein Cylinder hat zur Grundfläche einen Kreis, dessen Radius $5' 2''$ misst, seine Höhe beträgt $4'$. Wie gross ist sein Inhalt?

Auflösung. Es ist nach §. 86. Zus.

$$\text{Cyl.} = r^2 \pi h$$

$$= [5,2]^2 \cdot 3,141 \cdot 4$$

$$= 339,73056^{\circ}$$

$$= 339^{\circ} 730^{\circ\prime\prime} 560^{\circ\prime\prime\prime}.$$

3) Eine Pyramide von der Höhe $8'' 4'''$ hat zur Grundfläche $3 \square'$ $8 \square'''$. Wie viel beträgt ihr cubischer Inhalt?

Auflösung. Wenn B die Grundfläche und H die Höhe der Pyramide ausdrückt, so ist nach §. 87.

$$\text{Pyr.} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3,0008 \cdot 0,84$$

$$= 0,840224^{\circ}$$

$$= 840^{\circ\prime\prime} 224^{\circ\prime\prime\prime}.$$

4) Wie gross ist der körperliche Inhalt eines Kegels, dessen Höhe $5' 2'''$ und dessen Radius der Grundfläche $1' 7''$ beträgt?

Auflösung. Nach §. 87. Zus. ist

$$K. = \frac{1}{3} r^2 \pi h$$

$$= \frac{1}{3} [1,7]^2 \cdot 3,141 \cdot 5,02$$

$$= 15,1896666^{\circ}$$

$$= 15^{\circ} 189^{\circ\prime\prime} 666^{\circ\prime\prime\prime} 600^{\circ\prime\prime\prime\prime}.$$

§. 89.

Aufgabe. Den cubischen Inhalt einer parallel zur Grundfläche abgekürzten Pyramide zu berechnen.

Auflösung. (Fig. 31.) BCDEbcde sei die abgekürzte Pyramide, $bd = a$ die kleinere und $BD = A$ die grössere Grundfläche, dann $fF = h$ die Höhe derselben. Die ganze Pyramide sei ABD, ihre Höhe AF, das unbekannte Stück der Höhe $Af = x$, folglich die ganze Höhe $AF = h + x$. Es ist demnach

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pyr. ABD} = \frac{1}{3} A [h + x] \\ \text{Pyr. Abd} = \frac{1}{3} ax \end{array} \right\} \begin{array}{l} [\S. 88.] \\ \text{folglich} \end{array}$$

$$\text{Pyr. ABD} - \text{Pyr. Abd} = \frac{1}{3} A [h + x] - \frac{1}{3} ax,$$

$$\text{abgek. Pyr.} = \frac{1}{3} [Ah + (A - a) x].$$

Um den Werth von x zu finden setze man

$$bd : BD = Af^2 : AF^2 [\S. 74.],$$

$$\text{oder } a : A = x^2 : (h + x)^2, \text{ und}$$

$$\sqrt{a} : \sqrt{A} = x : h + x, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{h\sqrt{a}}{\sqrt{A} - \sqrt{a}} = \frac{h\sqrt{a}[\sqrt{A} + \sqrt{a}]}{A - a}. \text{ Daher}$$

$$\begin{aligned} \text{abgek. Pyr.} &= \frac{1}{3} \left[Ah + \frac{[A - a] h\sqrt{a} [\sqrt{A} + \sqrt{a}]}{A - a} \right] \\ &= \frac{1}{3} h [A + \sqrt{Aa} + a]. \end{aligned}$$

Beispiel. Gesetzt $A = 25 \square'$, $a = 9 \square'$, und $h = 6'$. Wie gross ist der cubische Inhalt dieser abgekürzten Pyramide?

Auflösung. Es ist nach obigem

$$\text{abgek. Pyr.} = \frac{1}{3} h [A + \sqrt{Aa} + a]$$

$$= \frac{1}{3} 6 [25 + 15 + 9]$$

$$= 2 \cdot 49$$

$$= 98 \square'.$$

§. 90.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt eines parallel zur Grundfläche abgekürzten senkrechten Kegels aus den beiden Radien R und r und aus seiner Höhe h zu berechnen.

Auflösung. (Fig. 30.) Gesetzt ABC sei der ganze Kegel, AD seine Höhe, das unbekannte Stück der Höhe $Ad = x$, also $AD = h + x$. Nun ist der Inhalt des Kegels $ABC = \frac{1}{3}R^2\pi [h + x]$ } [§. 87. Zus.]
 „ „ „ $Abc = \frac{1}{3}r^2\pi x$.

$$\begin{aligned} \text{Dah. d. abgek. K. } bcBC &= \frac{1}{3}R^2\pi [h + x] - \frac{1}{3}r^2\pi x \\ &= \frac{1}{3}\pi [R^2(h + x) - r^2x] \\ &= \frac{1}{3}\pi [R^2h + (R^2 - r^2)x] \\ &= \frac{1}{3}\pi [R^2h + (R + r)(R - r)x] \end{aligned}$$

Um den Werth von x zu finden, setze man

$$R : r = h + x : x, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{rh}{R - r}. \text{ Folglich ist}$$

$$\begin{aligned} \text{abgek. Kegel} &= \frac{1}{3}\pi [R^2h + \frac{(R + r)(R - r)rh}{R - r}] \\ &= \frac{1}{3}\pi h [R^2 + (R + r)r] \\ &= \frac{1}{3}\pi h [R^2 + Rr + r^2]. \end{aligned}$$

Beispiel. Gesetzt bei einem abgekürzten Kegel sei $R = 2' 3'''$, $r = 1' 4''$ und $h = 7'$. Wie gross ist der körperliche Inhalt des Kegels?

Auflösung. Obiger Aufgabe gemäss ist:

$$\begin{aligned} \text{Abgek. Kegel} &= \frac{1}{3}h\pi [R^2 + Rr + r^2], \text{ daher} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 3,141 \cdot [529 + 3,22 + 1,96] \\ &= 7 \cdot 1,047 \cdot 10,47 \\ &= 76,73463^o \\ &= 76^o 734^o 630^o. \end{aligned}$$

§. 91.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt einer Kugel zu berechnen.

Auflösung. Wenn r den Radius und d den Durchmesser der Kugel ausdrückt, so ist die allgemeine Formel für die Kugel, oder

$$K = \frac{4}{3} r^3 \pi \text{ oder } = \frac{1}{6} d^3 \pi.$$

Beweis. Jede Kugel ist so gross als eine Pyramide, deren Grundfläche die Oberfläche der Kugel und deren Höhe der Radius der Kugel ist [§. 79.]. Nun ist die Oberfläche der Kugel $= 4 r^2 \pi$ [§. 63. 3.], folglich der körperliche Inhalt der Kugel selbst, oder

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{3} \cdot 4 r^2 \pi \cdot r \text{ [§. 86.]} \\ &= \frac{4}{3} r^3 \pi \text{ oder } = \frac{1}{6} d^3 \pi, \text{ indem } r = \frac{1}{2} d, \\ \text{folglich } r^3 &= \frac{1}{8} d^3 \text{ ist.} \end{aligned}$$

1) **Beispiel.** Der Radius einer Kugel misst 5' 6". Wie gross ist ihr körperlicher Inhalt?

Auflösung. Es ist

$$\begin{aligned} K &= \frac{4}{3} r^3 \pi \text{ [Aufg.]} \\ &= \frac{4}{3} \cdot [5,6]^3 \cdot 3,141 \\ &= 735,479808^c \\ &= 735^c \ 479^c \ 808^{o''}. \end{aligned}$$

2) **Beispiel.** Der Diameter einer Kugel sei 2' 7" Duodecimalmass. Wie gross, im Duodecimalmasse ausgedrückt, ist ihr körperlicher Inhalt?

Auflösung. Man bringe das Mass des Diameter auf die kleinste Benennung nämlich auf Zoll, d. i. $2' 7'' = 31''$ Duodecimalmass.

Es ist ferner $K = \frac{1}{6} d^3 \pi$ [Aufg.]

$$= \frac{1}{6} \cdot [31]^3 \cdot 3,141$$

$$= 15595,5885^{\circ} \text{ Duod. Mass.}$$

$$= 9^{\circ} 43^{\circ} 1017^{\circ} \text{ Duod. Mass.}$$

I. Zusatz. Aus der Formel für die Kugel ist

$$r = \sqrt[3]{\frac{3K}{4\pi}} \text{ und } d = \sqrt[3]{\frac{6K}{\pi}},$$

wodurch man aus dem gegebenen cubischen Inhalte einer Kugel ihren Radius oder Diameter finden kann.

II. Zusatz. Sind R und r die Radien zweier Kugeln K und k, so ist

$$K : k = \frac{4}{3} R^3 \pi : \frac{4}{3} r^3 \pi = R^3 : r^3, \text{ d. h.}$$

Alle Kugeln verhalten sich, ihrem körperlichen Inhalte nach, zueinander wie die Cubuse ihrer Radien [§. 82. Zus.].

§. 92.

Aufgabe. Ein Cylinder, eine Kugel und ein Kegel, wovon ersterer und letzterer zur Grundfläche den grössten Kugelkreis der Kugel und zur Höhe den Durchmesser der Kugel haben, sind gegeben. Man soll das Verhältniss finden, in welchem sie, ihrem körperlichen Inhalte nach, zu einander stehen.

Auflösung und Beweis. Es ist:

$$\text{Cyl.} = \text{Bas. h.} [\S. 86. \text{Zus.}] = r^2 \pi \cdot 2r = 2 r^3 \pi.$$

$$\text{Kugel} = \frac{4}{3} r^3 \pi [\S. 91.]$$

$$\text{Kegel} = \frac{1}{3} \text{Bas. h.} [\S. 87. \text{Zus.}] = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot 2r = \frac{2}{3} r^3 \pi.$$

Stellt man diese drei Körper in Proportion, so ist:

$$\text{Cyl.} : \text{Kug.} : \text{Keg.} = 2 r^3 \pi : \frac{4}{3} r^3 \pi : \frac{2}{3} r^3 \pi$$

$$= 6 : 4 : 2$$

$$= 3 : 2 : 1, \text{ d. h.}$$

der in der Aufgabe gegebene Cylinder ist drei Mal und die Kugel zwei Mal so gross, als der Kegel.

§. 93.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt eines Kugelausschnitts zu entwickeln.

Auflösung und Beweis. (Fig. 32.) Der Kugelausschnitt FDGC ist einer Pyramide gleich, deren Grundfläche die krumme Oberfläche des Kugelabschnitts und deren Höhe der Radius der Kugel ist [§. 79. Zus.]. Es ist die krumme Oberfläche des Kugelabschnitts, wenn $DH = h$ bekannt ist, $2 r \pi h$ [§. 64. 2.]; folglich der cubische Inhalt des Kugelausschnitts, oder

$$\text{Sect.} = \frac{1}{3} \text{Basis} \times h \text{ [§. 87. Zus.]}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2 r \pi h \cdot r = \frac{2}{3} r^2 \pi h.$$

I. Zusatz. Ist $h = r$, so wird $\text{Sect.} = \frac{2}{3} r^3 \pi =$ der Halbkugel, und für $h = 2 r$, wird $\text{Sect.} = \frac{4}{3} r^3 \pi =$ der ganzen Kugel [§. 91.].

II. Zusatz. (Fig. 32.) Da $\text{Sect.} = \frac{2}{3} r^2 \pi h = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot 2 h$, und $r^2 \pi$ die Fläche eines grössten Kugelkreises ist, so ist der Kugelausschnitt FDGC auch einem Kegel gleich, dessen Grundfläche der grösste Kugelkreis der Kugel und dessen Höhe $= 2 h =$ der doppelten Höhe des Kugelabschnitts ist.

§. 94.

Aufgabe. Den cubischen Inhalt eines Kugelabschnitts zu entwickeln.

Auflösung und Beweis. (Fig. 32.) FDG sei der Kugelabschnitt, $DH = h$ seine Höhe, und r der Radius der Kugel. Der Kugelabschnitt gleicht dem Unterschiede zwischen dem körperlichen Inhalte des Kugelausschnitts FDGC und dem des Kegels FCG, worin die Höhe HC

$= r - h$, und $GH^2 = DH \cdot HE = h [2r - h]$ ist.

Daher

Segm. FDG = Sect. FDGC — Kegel FGC

$$= \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{1}{3} HG^2 \cdot \pi \cdot HC \quad [\S. 93. \text{ u. } \S. 87. \text{ Z.}]$$

$$= \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{1}{3} \pi h [2r - h] [r - h]$$

$$= \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{1}{3} \pi h [2r^2 - 3rh + h^2]$$

$$= \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{2}{3} r^2 \pi h + rh^2 \pi - \frac{1}{3} h^3 \pi$$

$$= rh^2 \pi - \frac{1}{3} h^3 \pi$$

$$= h^2 \pi [r - \frac{1}{3} h].$$

I. Zusatz. Ein Kugelabschnitt gleicht einem Cylinder, dessen Grundfläche $h^2 \pi$, d. i. ein Kreis mit dem Radius h , und dessen Höhe $r - \frac{1}{3} h$ ist [Aufg.].

II. Zusatz. (Fig. 32.) Ein Kegel FDG, welcher mit dem Kugelabschnitte Grundfläche und Höhe gemein hat, ist

$$= \frac{1}{3} HG^2 \pi h = \frac{1}{3} h^2 \pi [2r - h].$$

Es verhält sich demnach dieser Kegel zum Segmente, oder

$$\text{Keg.: Segm.} = \frac{1}{3} h^2 \pi [2r - h] : h^2 \pi [r - \frac{1}{3} h]$$

$$= 2r - h : 3r - h$$

$$= HE : HE + r, \text{ denn es ist } 2r - h$$

$$= HE, \text{ folglich auch } 3r - h = 2r - h + r$$

$$= HE + r.$$

§. 95.

Aufgabe. Den Inhalt einer körperlichen Zone (Fig. 32.) FGAB aus dem Radius der Kugel r und aus den Entfernungen der Ebenen der beiden Parallelkreise vom Pole der Kugel, nämlich aus $DH = h$ und $DC = H$, zu finden.

Auflösung und Beweis. Man betrachte die

körperliche Zone FGAB als den Unterschied der beiden Kugelabschnitte ADB und FDG. Es ist also die körperliche Zone FGAB = Segm. ADB — Segm. FDG.

$$= H^2 \pi \left[r - \frac{1}{3} H \right] - h^2 \pi \left[r - \frac{1}{3} h \right] [\S. 94.]$$

$$= \pi \left[H^2 r - \frac{1}{3} H^3 - h^2 r + \frac{1}{3} h^3 \right]$$

$$= \pi \left[r (H^2 - h^2) + \frac{1}{3} (h^3 - H^3) \right]$$

$$= \pi \left[r (H + h) (H - h) + \frac{1}{3} (h^3 - H^3) \right].$$

§. 96.

Aufgabe. (Fig. 32. a.) Den körperlichen Inhalt eines keilförmigen Kugelausschnittes ABDE aus dem Radius der Kugel r und dem Neigungswinkel $DCE = \alpha$, den die beiden Ebenen ABD und ABE bilden, zu entwickeln.

Auflösung und Beweis. Der Sector ABDE ist der sovielte Theil der Kugel als der Winkel α , unter welchem sich seine Seitenflächen ABD und ABE neigen, ein Theil von 360° ist. Daher

Sect. ABDE : Kug. = $\alpha^\circ : 360^\circ$, woraus

$$\text{Sect. ABDE} = \text{Kug.} \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{4}{3} r^3 \pi \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} [\S. 91.]$$

Vermischte stereometrische Aufgaben.

§. 97.

Aufgabe. Eines senkrechten Kegels Radius r und Höhe h ist gegeben; man soll den Radius x eines Cy-

linders mit der Höhe m finden, dessen krumme Seitenfläche der des Kegels gleicht.

Auflösung. Es ist die krumme Seitenfläche des Cylinders $= 2x\pi m$ und die des Kegels $= r\pi\sqrt{h^2 + r^2}$ [§. 60. Zus.], daher $2x\pi m = r\pi\sqrt{h^2 + r^2}$, woraus $x = \frac{r}{2m}\sqrt{h^2 + r^2}$.

Zusatz. Für den Fall, dass der Radius y eines Kegels mit der Höhe h , dessen krumme Seitenfläche mit der eines Cylinders mit der Höhe m und dem Radius ϱ gleich ist, gesucht werden soll, ist;

$$2\varrho\pi m = y\pi\sqrt{h^2 + y^2}, \text{ folglich} \\ y = \sqrt{-\frac{1}{2}h^2 + \sqrt{4\varrho^2 m^2 + \frac{1}{4}h^4}}.$$

§. 98.

Aufgabe. Der Radius einer Kugel ist r ; man soll den Radius x eines Kegels mit der Höhe h finden, dessen krumme Seitenfläche der Oberfläche der Kugel gleicht.

Auflösung. Es ist die Oberfläche der Kugel $4r^2\pi$ und die krumme Fläche des Kegels $x\pi\sqrt{h^2 + x^2}$; also $4r^2\pi = x\pi\sqrt{h^2 + x^2}$, woraus $x = \sqrt{-\frac{1}{2}h^2 + \sqrt{16r^4 + \frac{1}{4}h^4}}$ ist. —

§. 99.

Aufgabe. Einer Kugel Radius sei R ; man soll den Radius x der obern Grundfläche eines abgekürzten Kegels finden, dessen Höhe h und Radius der untern Grundfläche r ist, und welcher am körperlichen Inhalte obiger Kugel gleicht.

Auflösung. Es ist der Inhalt des abgekürzten

Kegels $= \frac{1}{3} \pi h [r^2 + r x + x^2]$ und der der Kugel $= \frac{4}{3} R^3 \pi$.

Daher $\frac{1}{3} \pi h [r^2 + r x + x^2] = \frac{4}{3} R^3 \pi$, woraus:

$$x = -\frac{1}{2} r + \sqrt{\left(\frac{4}{h} R^3 - \frac{3}{4} r^2\right)}.$$

§. 100.

Aufgabe. Man soll einen gegebenen Kegel durch eine Ebene, parallel zur Grundfläche, so theilen, dass der oben abgeschnittene Kegel den Inhalt m erhalte, wie gross ist die Höhe des letzteren zu nehmen?

Auflösung. (Fig. 30.) bc sei $[\# BC]$ der Durchschnitt, $Ad = x$, dann $AD = h$, $DC = r$, so ist Kegel $ABC \sim$ Kegel Abc , folglich

$$ABC : Abc = h^3 : x^3, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{3} r^2 \pi h : m = h^3 : x^3, \text{ woraus } x = \sqrt[3]{\frac{3 h^2 m}{r^2 \pi}} \text{ ist.}$$

§. 101.

Aufgabe. (Fig. 57.) Den körperlichen Inhalt eines dreiseitigen [senkrechten oder schiefen] Prisma $LMROPQ$ zu finden, von welchem oben ein Stück von irgend einer zur Grundfläche nicht parallelen Ebene LMR abgeschnitten ist, wenn die drei Kanten $LO = a$, $MP = b$ und $RQ = c$, dann der Inhalt des auf obige Kanten senkrechten Durchschnittes $\triangle ABC = m$ gegeben ist.

Auflösung. Man lege durch L , B und C , dann durch O , B und C Ebenen, so zerfällt das ganze Prisma in vier Pyramiden, wovon zwei ($BCRML$ und $BCQPO$) vierseitig, und die anderen zwei ($ABCL$ und $ABCO$)

dreiseitig sind. Man fälle AD senkrecht auf BC, so muss AD auch auf MRQP senkrecht stehen, folglich die Höhe der beiden vierseitigen Pyramiden vorstellen, deren Grundflächen die Trapeze BCRM und BCQP sind. Es ist daher

$$\begin{aligned} \text{LMROPQ} &= \text{BCRML} + \text{BCQPO} + \text{ABCL} + \text{ABCO} \\ &= \frac{1}{3} \text{AD} \cdot \text{BC} \cdot \frac{1}{2} [\text{BM} + \text{CR}] + \frac{1}{3} \text{AD} \cdot \text{BC} \cdot \frac{1}{2} [\text{BP} + \text{CQ}] \\ &\quad + \frac{1}{3} m \cdot \text{AL} + \frac{1}{3} m \cdot \text{AO} \\ &= \frac{1}{3} \text{AD} \cdot \text{BC} \cdot \frac{1}{2} [\text{BM} + \text{CR} + \text{BP} + \text{CQ}] + \frac{1}{3} m \times \\ &\quad \times [\text{AL} + \text{AO}] \\ &= \frac{1}{3} m \cdot [b + c] + \frac{1}{3} m \cdot a = m \cdot \frac{1}{3} [a + b + c]. \end{aligned}$$

I. Zusatz. Ein mehrseitiges schief abgeschnittenes Prisma kann in dreiseitige zerlegt, dann der Inhalt dieser letzteren, also zuletzt auch der Gesamtinhalt gefunden werden.

II. Zusatz. Der Inhalt einer schief abgekürzten Pyramide wird gefunden, wenn man die Ergänzungs-Pyramide findet, dann den Inhalt dieser von dem Inhalte der ganzen Pyramide abzieht.

§. 102.

Aufgabe. (Fig. 65.) Der Diameter einer Kugel sei d ; man soll die Seite $AB = x$ des in ihr construirten Cubus finden.

Auflösung. Ist AH ein in einer Kugel construirter Cubus, so müssen alle seine Ecken die Oberfläche der Kugel berühren, und CF der Diameter d der Kugel sein. Es ist:

$$\begin{aligned} \text{CF}^2 &= \text{CB}^2 + \text{BF}^2 = \text{CD}^2 + \text{BD}^2 + \text{BF}^2, \text{ oder} \\ d^2 &= 3 x^2, \text{ also } x = d \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} d \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Es verhält sich daher auch die Seite des Kubus zum Diameter der Kugel wie $\frac{1}{2} d \sqrt{3} : d$ oder $1 : \sqrt{3}$.

§. 103.

Aufgabe. Der Diameter einer Kugel ist d ; man soll die Seite x eines in derselben beschriebenen Tetraeders finden.

Auflösung. (Fig. 67.) ABCD sei das Tetraeder und jede seiner Seiten $= x$. Man fälle $AG = d$ senkrecht auf die Ebene BDC, so ist die Mitte E von AG der Mittelpunkt der Kugel und F der des Kreises um das gleichseitige $\triangle BDC$, dessen Radius $FC = \sqrt{\frac{x^2}{3}}$ [§. 150. 1. eb. G.] ist. — Man setze $AF = z$, so ist $FG = d - z$, und, da $AFC = R$ ist, $AF^2 = AC^2 - FC^2$, oder $z^2 = x^2 - \frac{x^2}{3} = \frac{2}{3} x^2$ und $z = \sqrt{\frac{2}{3} x^2}$.

Ferner ist:

$AF : FC : FG$ [§. 88. Zus. II. eb. G.] oder $z : \sqrt{\frac{x^2}{3}} : d - z$

also $dz - z^2 = \frac{x^2}{3}$, oder $dz - \frac{2}{3} x^2 = \frac{x^2}{3}$, folglich

$dz = x^2$, oder $d \sqrt{\frac{2}{3} x^2} = x^2$, woraus $x = d \sqrt{\frac{2}{3}}$ ist. —

Zusatz. Es verhält sich der Diameter der Kugel zur Seite des Tetraeders wie

$d : d \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

§. 104.

Aufgabe. Aus dem Diameter d der Kugel die Seite des darin beschriebenen Octaeders zu finden.

Auflösung. — (Fig. 68.) AGDFEC sei das Octa-

öder und jede seiner Seiten $= x$. Man falle $AF = d$ senkrecht auf DE und ziehe BC , so ist $AB = BC = \frac{1}{2} d$ und $ABC = R$, folglich $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$ oder $x = \sqrt{\frac{1}{2} d^2} = \frac{1}{2} d \sqrt{2}$.

Zusatz. Es verhält sich der Diameter der Kugel zur Seite des Octaëders, wie $d : \frac{1}{2} d \sqrt{2} = \sqrt{2} : 1$.

§. 105.

Aufgabe. Aus dem Diameter d einer Kugel die Seite des darin construirten Ikosaëders zu finden.

Auflösung. (Fig. 69.) Es sei $AECD$ das Ikosaëdron, x seine Seite, M der Mittelpunkt der darum beschriebenen Kugel, also AC die Axe derselben. Man lege durch $ELDGF$ eine Ebene, so entsteht das reguläre Fünfeck $ELDGF$, dessen Seite $= x$ ist, und auf dessen Mitte B die Axe AC der Kugel senkrecht steht. Man ziehe BD , so ist diese Linie der Radius des um das reguläre Fünfeck beschriebenen Kreises, also $BD = x \sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}}$. Es sei $AB = y$, so ist:

$AB : AD : AC$ [§. 88. Zus. I. eb. G.], oder $y : x : d$, also $y = \frac{x^2}{d}$; ferner, da $ABD = R$ ist, $AD^2 = BD^2 + AB^2$,

oder $x^2 = \frac{2 x^2}{5 - \sqrt{5}} + \frac{x^4}{d^2}$, woraus $x = d \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$.

Zusatz. Der Diameter der Kugel verhält sich zur Seite des Ikosaëders, wie $d : d \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} = 1 : \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$, oder $= \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} : 1$.

§. 106.

Aufgabe. Man soll aus dem Diameter d einer Kugel die Seite des darin beschriebenen Dodekaëders finden.

Auflösung. (Fig. 70.) Es sei ZDC das Dodekaëder, x seine Seite und A der Mittelpunkt der Kugel, so wie $SG = d$ ihre Axe, senkrecht auf der Seitenfläche DEFCY. Man lege parallel zu zwei Seiten-Flächen DEFCY und TZUWV durch A eine Ebene, so schneidet diese alle übrigen zehn Fünfecke immer in der Mitte zweier Seiten. Die dadurch entstehende Durchschnits-Figur ist daher ein reguläres Zehneck HKLMNIOPQR, dessen Seite der halben Diagonale der begrenzenden Fünfecke des Dodekaëders gleicht. — Man ziehe BC , so ist diese Linie Radius des um das Fünfeck beschriebenen Kreises; daher

$$BC = x \sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}}.$$

Die halbe Diagonale des Fünfeckes, oder eine Seite des regulären Zehneckes $S = \frac{x}{2BC} \sqrt{4BC^2 - x^2} =$
 $= \frac{x}{2} \sqrt{4 - \frac{x^2}{BC^2}} = \frac{x}{2} \sqrt{4 - \frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}.$

Der Radius für dieses reguläre Zehneck, dessen Seite S ist, oder $R = \frac{S}{2} [\sqrt{5} + 1] = \frac{x}{4} [3 + \sqrt{5}].$

Man ziehe AX nach der Mitte von DY und dann XB und BY , so ist auch $AX = R$ und, da $BXY = 90^\circ$ ist, $XB = \sqrt{BY^2 - XY^2} = \sqrt{BC^2 - \frac{1}{4} x^2} =$
 $= x \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}}; \text{ also, indem } ABX = 90^\circ, AB =$
 $= \sqrt{AX^2 - XB^2} = \sqrt{R^2 - XB^2} = x \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}.$

Es ist $SB = \frac{1}{2} d + AB$, also $BG = \frac{1}{2} d - AB$; ferner $SB : BC : BG$, also $BC^2 = SB \cdot BG$ oder

$$\frac{2x^2}{5 - \sqrt{5}} = \frac{1}{4} d^2 - \frac{x^2}{40} [25 + 11\sqrt{5}], \text{ woraus}$$

$$x = d \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}} \text{ ist.}$$

§. 107.

Aufgabe. Aus der Seite a eines Tetraëders dessen körperlichen Inhalt zu finden.

Auflösung. (Fig. 67.) Man fälle AF senkrecht auf BDC , und ziehe FC , so ist $FC = \sqrt{\frac{a^2}{3}}$, dann

$$AF = \sqrt{AC^2 - FC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3} a^2} = a \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Der Inhalt des Dreieckes $BDC = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$; folglich das Tetraëder $= \frac{1}{3} \triangle BDC \cdot AF$ [§. 87.] $= \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \cdot a \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$.

§. 108.

Aufgabe. Aus der Seite a des Octaëders dessen körperlichen Inhalt finden.

Auflösung. (Fig. 68.) Man fälle AB senkrecht auf die Ebene DE und ziehe BC , so ist $AB = BC = \sqrt{\frac{1}{2} AC^2} = a \sqrt{\frac{1}{2}}$; ferner $DE = a^2$ und $ADCEG = \frac{1}{3} DE \cdot AB = \frac{1}{3} a^3 \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} a^3 \sqrt{2}$ und $ADCEGF = \frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}$.

§. 109.

Aufgabe. Aus der Seite a des Ikosaëders dessen körperlichen Inhalt zu finden.

Auflösung. (Fig. 69.) Das Ikosaëder besteht

aus zwanzig Pyramiden, welche mit der Spitze im Mittelpunkte der darum beschriebenen Kugel zusammenstossen, und deren Grundfläche eine Seitenfläche des Ikosaëders ist. Eine solche Pyramide ist AMGD. Man fälle MN senkrecht auf AGD, und ziehe NG; so ist

$$MG = AM, BD = a\sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}}, \text{ ferner } AD = a, \text{ also}$$

$$AB = \sqrt{a^2 - BD^2} = a\sqrt{1 - \frac{2}{5 - \sqrt{5}}} = a\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}},$$

dann $AB : AD : AC$ oder $AB : a : 2 MG$, woraus

$$MG = \frac{a}{2 AB} = \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}}, \text{ endlich } NG = a\sqrt{\frac{1}{3}},$$

mithin die Höhe der Pyramide, oder

$$MN = \sqrt{MG^2 - GN^2} = \sqrt{\left[\frac{1}{4} a^2 \frac{5 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} - \frac{a^2}{3}\right]} =$$

$$= a \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{12 [3 - \sqrt{5}]}} = \frac{a [3 + \sqrt{5}]}{4\sqrt{3}}. \text{ Die Grundfläche}$$

$AGD = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$, folglich das Ikosaëder selbst, oder

$$Q = 20. \quad AMGD = 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} \cdot a \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{4\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{5}{12} a^3 [3 + \sqrt{5}].$$

§. 110.

Aufgabe. Aus der Seite a eines Dodekaëders dessen körperlichen Inhalt zu finden.

Auflösung. (Fig. 70.) Das Dodekaëder besteht aus zwölf Pyramiden ADEFCY, deren Grundfläche

$DEFCY = m = \frac{5}{4} a \sqrt{4BC^2 - a^2}$ ist, und, da

$$BC^2 = \frac{2 a^2}{5 - \sqrt{5}} = a^2 \frac{10 + 2\sqrt{5}}{20} \text{ ist, auch}$$

$$m = \frac{5}{4} a^2 \sqrt{\left[\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5} - 1\right]} = \frac{5}{4} a^2 \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}.$$

Es ist ferner $AB = a \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}$ [§.254. eb.G.],
 folglich das Dodekaëder, oder $Q = 12 \cdot \frac{1}{3} m \cdot AB =$
 $= 4m \cdot AB = 5a^3 \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} \cdot \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}} =$
 $= \frac{5}{2} a^3 \sqrt{\frac{47 + 21\sqrt{5}}{10}} = \frac{5}{2} a^3 \frac{15 + 7\sqrt{5}}{10} =$
 $= \frac{1}{4} a^3 [15 + 7\sqrt{5}].$

Anhang.

Gemischte Aufgaben zur Selbstübung.

1) Die drei Seiten eines Dreieckes ABC sind $BC = a = 36'$, $AC = b = 40'$ und $AB = c = 45'$; man soll die Grundlinie und Höhe eines Rechteckes finden, welches mit diesem Dreiecke gleichen Umfang und gleiche Fläche hat.

2) Die Fläche eines Rechteckes hält $100 \square'$; wie gross ist dessen Grundlinie und Höhe, wenn das Rechteck so beschaffen ist, dass seine Hälfte [welche durch die Verbindungslinie der Halbirungspunkte der beiden gegenüberstehenden grösseren Seiten des Rechteckes entsteht] mit dem ganzen Rechtecke ähnlich ist?

Ist x die Grundlinie und grössere Seite und y die Höhe dieses Rechteckes, so hat man:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \quad \frac{1}{2}x : y : x \text{ und} \\ 2. \quad xy = 100 \end{array} \right.$$

woraus nun x und y zu bestimmen sind. —

3) Wie schwer wiegt 1 pariser Cubicfuss destillirten Wassers im Parisergewichte, wenn 1 bayer. Cubic-

fuss nach bayer. Gewichte 44 Pfund 11 Loth 3,36 Quintel wiegt, und bekannt ist, dass 1000 Pariserfuss 1113 bayerische Fuss, und 100 bayerische Pfund 114.66 Pariserpfunde geben?

4) Wie schwer drückt eine 60pfündige eiserne Kugel auf den Boden eines mit destillirten Wasser gefüllten Gefässes, wenn die Dichte des Eisens 7,113 ist?

Anmerkungen. 1. Unter der Dichte eines Körpers versteht man eigentlich das Verhältniss seiner Masse zu seinem Volumen. Wenn daher M die Masse und V das Volumen eines Körpers bedeutet, so ist die Dichte

$$d = \frac{M}{V}.$$

Die Dichte δ eines gleichen Volumen destillirten Wassers von der Masse m bei derselben Temperatur:

$$\delta = \frac{m}{V}, \text{ daher}$$

$$\frac{d}{\delta} = \frac{M}{m},$$

und da nach den Lehren der Physik

$$\frac{M}{m} = \frac{P}{p}$$

ist, worin P und p die absoluten Gewichte beider Körper bedeuten, so hat man

$$\frac{d}{\delta} = \frac{P}{p}$$

Die Dichte des destillirten Wassers [bei 0° R. gewöhnlich] wird nun als Einheit für die Dichten aller festen und tropfbarflüssigen Substanzen angenommen, daher

$$\text{I. } d = \frac{P}{p}, \text{ d. h.}$$

die Dichte eines Körpers ist gleich dem Quotienten aus seinem Gewichte und dem Gewichte eines ihm gleichen Volumen Wassers.

Wenn nun P und p sich auf die Volumeneinheit beziehen, und wenn ferner die Dichte einer Substanz sowohl, als auch das Gewicht der Volumeneinheit Wassers bekannt ist, so hat man für das Gewicht der Volumeneinheit der Substanz:

$$P = d \cdot p.$$

Das Gewicht Q dieser Substanz für das Volumen K ist daher

$$\text{II. } Q = d \cdot p \cdot K,$$

d. h. das Gewicht eines Körpers ist gleich dem Producte aus seiner Dichte in das Gewicht der Volumeneinheit Wasser multiplicirt mit dem Volumen dieses Körpers.

2. Es wird in der Physik nachgewiesen, dass jeder Körper, wenn er in Wasser gebracht wird, von seinem Gewichte ebenso viel verliert, als das Gewicht eines mit ihm gleichen Volumens Wasser wiegt, daher ist das Gewicht Q' eines Körpers im Wasser:

$$\text{III. } Q' = Q - p \cdot K = Q - \frac{Q}{d}$$

wenn p , K und Q dieselbe Bedeutung wie in II. haben. —

Durch diese Erläuterungen wird sowohl diese als manche der folgenden Aufgaben klar. —

5) Bei einem geraden Kegel verhält sich der Diameter der Grundfläche zur Höhe wie 2 zu 3, wie gross ist der Winkel des Kreisausschnittes, welchen die krumme Seitenfläche des Kegels bildet?

Antw. Es muss $n^\circ = \frac{360^\circ}{\sqrt{11}}$ sein. —

6) Wie gross ist der Diameter und die Höhe des Kegels in der vorhergehenden Aufgabe, wenn die ganze Oberfläche des Kegels $1^\circ 88' 9''$ Duodecimalmass ist?

7) Ein Cubicfuss Blei wiegt 502,6 Pfund; wie gross ist die Kante einer, einen Zentner schweren, vierseitigen Pyramide aus Blei, wenn alle Kanten derselben unter sich gleich sind?

8) Die Diagonale eines Würfels ist $2' 11'''$ (Duodecimalmass); wie gross ist dessen Oberfläche und körperlicher Inhalt?

9) Man soll den Zwischenraum zwischen drei sich berührenden gleich grossen Kreisen finden, wenn der Radius der Kreise $8'' 9'''$ beträgt.

10) Um ein Tetraëder ist eine Kugel beschrieben; man suche 1. den körperlichen Inhalt und 2. die Oberfläche dieses Tetraëders, wenn der Kugeldurchmesser $d = 3' 7''$ (Duodecimalmass) ist.

11) In einem gleichschenkligen Trapeze, dessen eine Parallele $a = 8'' 5'''$ und andere $b = 1' 9''$ misst, ist ein Kreis so beschrieben, dass er alle vier Seiten desselben berührt; wie gross ist der Radius dieses Kreises?

12) Man soll ein Dreieck durch eine Parallele zur Grundlinie halbiren; wie kann diess durch Construction geschehen?

13) Es sollen 6 metallene Kugeln, deren Durchmesser $1' 4''$, $2' 3''$, $3' 8'''$, $4' 1''$, $5'$ und $5' 7''$ sind, in eine grosse Kugel umgegossen und letztere vergoldet werden; wie viel Gold braucht man dazu, wenn auf 1 Quadratzoll ein halbes Quintel kömmt?

14) Wenn man über die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Kathete $a = 3'$ und andere $b = 4'$ misst, Halbkreise beschreibt, so entstehen über den Katheten zwei Halbmonde m_1 und m_2 ; wie gross ist die Fläche beider zusammen genommen?

Antw. Es muss $m_1 + m_2 = \frac{1}{2}ab$ sein. — [Beweis?]

15) Die Fläche eines rechtwinkligen Dreieckes sei f , dessen Umfang p , man soll die drei Seiten dieses Dreieckes finden.

16) Die Summe und die Differenz der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes ist $S = 2' 7'' 3'''$ und $D = 8'' 9'''$; man suche die Hypotenuse.

17) Die Hypotenuse $a = 4' 5''$ und die Summe $S = 6' 3''$ der beiden Katheten ist gegeben, man suche die Katheten selbst.

18) In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Fläche f und das Verhältniss der beiden Katheten $\frac{b}{c} = m$ gegeben, man suche die drei Seiten, a , b , c dieses Dreieckes.

19) Ein Cubicfuss Blei wiegt 502,6 Pfund, wie gross ist der Durchmesser einer 80pfündigen Kugel, und in welchem Verhältnisse steht dieser zu dem einer 2 Zentner schweren aus demselben Metalle?

20) Die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich wie $m : n$, in welchem Verhältnisse stehen ihre körperlichen Inhalte?

21) Man hat zwei gleich schwere Kugeln, die eine von Kupfer die andere von Zinn; in welchem Verhältnisse stehen ihre Durchmesser, wenn $k = 8,895$ und $z = 7,264$ die Dichten beider Metalle sind?

Anmerk. Aus den in der 4. Aufgabe gegebenen Erläuterungen findet man sehr leicht, dass die Volumina zweier gleich schweren Körper von verschiedener Dichte im verkehrten Verhältnisse ihrer Dichten zu einander stehen. Wenn daher d_k der Durchmesser der kupfernen und d_z jener der zinnernen Kugel ist, so findet man

$$d_k : d_z = \sqrt[3]{z} : \sqrt[3]{k}, \text{ etc.}$$

22) Es ist bekannt, dass der Diameter einer 3pfündigen Kugel von Blei dem Diameter einer 2pfündigen von Eisen und dem einer 18löthigen von Stein gleich; was würde demnach eine 12pfündige eiserne Kugel wiegen, wenn sie von Blei wäre, und was eine 8pfündige steinerne, wenn sie von Eisen wäre?

23) Ein Bild, von viereckiger Form, dessen Länge $3' 6''$ und Breite $2' 4''$ beträgt, ist mit einem überall gleichbreiten Rahmen umgeben, dessen Fläche sich zur Fläche des Bildes wie $17 : 27$ verhält. Wie breit ist dieser Rahmen?

24) Im $\triangle ABC$ ist $BC = a = 15'$, $AC = b = 12'$, dann $DC = m = 9'$ die Entfernung des Punctes D, in der Seite BC, von C. Man soll von D aus das Dreieck durch eine gerade Linie halbiren, wo, d. i. wie

weit von C, in der Seite AC, wird die Halbirungslinie eintreffen?

25) Der körperliche Inhalt eines Cylinders beträgt 10^c 110^c 19^c (Duodecimalmass), die Peripherie der Grundfläche verhält sich zur Höhe wie 7 : 3; wie gross ist der Durchmesser und die Höhe dieses Cylinders?

26) Die drei Seiten a, b, c eines Dreieckes verhalten sich wie 3, 7 und 9; in welchem Verhältnisse steht der Radius des darin — zu dem des darum beschriebenen Kreises?

Aufl. Aus §. 184. eb. G. ist bekannt, dass, wenn R der Radius des um das Dreieck und r der Radius des in dem Dreiecke beschriebenen Kreises ist, auch

$$R : r = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}} \\ = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{a+b+c}$$

sein muss. Hieraus ergibt sich nun

$$R : r = abc : \frac{1}{2}(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$$

oder

$$R : r = 2 : \frac{b+c-a}{a} \cdot \frac{a+c-b}{b} \cdot \frac{a+b-c}{c}$$

Also ist mit Benützung der Angaben:

$$R : r = 2 : \frac{13}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{9}$$

oder

$$R : r = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 : 1 \cdot 5 \cdot 13 \text{ etc.}$$

27) Bei einer Gartenanlage, welche die Form eines regulären Achteckes hat, ist die grösste Diagonale $d = 14^{\circ} 9'$; wie gross ist der Umfang und die Fläche dieses Gartens?

28) Im $\triangle ABC$ ist $BC = a = 11'$, der Abstand der von A auf BC gefällten, Höhe AD vom Punkte C, nämlich $DC = m = 5'$; man soll von diesem Dreiecke durch eine Senkrechte auf BC gegen C zu ein Stück abschneiden, welches $p = \frac{2}{5}$ des ganzen beträgt. Wie weit von C muss die Senkrechte errichtet werden?

29) Zum Vergolden von vier Kugeln brauchte man 8 Loth und 0,97 Quintel Gold, so dass auf einen Quadratzoll ein halbes Quintel traf. Der Durchmesser der zweiten Kugel ist um einen Zoll, der der dritten um $2''$ und der der vierten um $3''$ grösser als der der ersten; wie gross ist jeder dieser Durchmesser, und wie viel Gold brauchte man zu jeder dieser Kugeln?

30) Wie gross ist der Durchmesser einer concentrisch-hohlen Kugel von Gusseisen, bei welcher die Eisenstärke rings $a = 7''' 2'''$ (Duodecimalmass) ist, wenn sie einen Zentner und 12 Pfund (b) wiegt, und wenn bekannt ist, dass ein Cubicfuss Wasser 44,37 Pfund und die Dichte des Gusseisens $7\frac{1}{2}$ ist?

31) Wie viel an Gewicht fasset die Kammer einer 16pfündigen Haubitze, wenn die Länge der Kammer [den halbkugelförmigen Schluss mitgerechnet] $1\frac{1}{2}$ und ihr Durchmesser $\frac{1}{2}$ Granaten-Durchmesser, dann der einpfündige Granaten-Durchmesser $3,224''$ beträgt, übrigens $38\frac{1}{2}^c$ Pulver ein Pfund wiegen?

32) Der Cubicinhalt eines geraden Kegels hält 236^c ; wie gross ist die schiefe Seite dieses Kegels, wenn der Winkel des Sectors, welchen die krumme Seitenfläche dieses Kegels bildet, $193^\circ 12'$ beträgt?

33) Zwischen den Schenkeln eines Winkels von 60° ist ein Kreis beschrieben, welcher beide Schenkel in einer Entfernung von $3' 6''$ vom Scheitel berührt; man

suche den Radius dieses Kreises und die Entfernung des Mittelpunctes vom Scheitel.

34) Die Grundlinie $a = 3' 5''$ und die Höhe $h = 2' 8'''$ eines Dreieckes ist gegeben. Wie gross ist die Grundlinie und Höhe eines Rechteckes, dessen Grundlinie auf der des Dreieckes liegt, und dessen obere Ecken die beiden andern Seiten des Dreieckes berühren, wenn sich die Grundlinie und Höhe des Rechteckes wie $1 : n$ (wobei $n = 3$) verhalten soll?

35) Man suche das Verhältniss des Radius des in einem regulären Sechsecke beschriebenen Kreises zu dem des darum beschriebenen.

36) Wie schwer wiegt ein $5'$ langer hohler Cylinder von Gusseisen, dessen Durchmesser im Lichten $1' 5''$ und Eisenstärke $1'' 5'''$ (Duodecimalmass) beträgt, wenn ein Cubicfuss Wasser $44,37$ Pfund wiegt, und das Gusseisen die Dichte $7\frac{1}{2}$ hat?

37) In einem rechtwinkligen Dreiecke ist über der grössern Kathete ein Halbkreis so beschrieben, dass er den Scheitel des rechten Winkels durchschneidet und die Hypotenuse berührt. Beide Flächen, um die grössere Kathete bewegt, bilden die eine einen Kegel die andere eine Kugel. In welchem Verhältnisse stehen die Oberflächen und in welchem die körperlichen Inhalte beider Körper, wenn der Radius des Halbkreises $r [= 2'' 4''']$ und die grössere Kathete um $n [= 2'']$ länger ist als der Durchmesser?

38) Es sei A die ganze Oberfläche eines geraden Kegels, b die Fläche der, von der Spitze um h entfernten, zur Grundfläche parallelen Durchschnitsfigur. Man suche den Radius der Grundfläche und die Höhe des ganzen Kegels.

39) Der Umfang eines Quadranten ist $p [= 1' 2'']$, wie gross ist dessen Fläche?

40) Der körperliche Inhalt eines Kugel-Segmentes ist gerade so gross, als der des Kegels, der ersteres zum centralen Kugel-Sector ergänzt. Man suche die Höhe des Segments, wenn der Kugelradius $R [= 1' 5'' 11'''$ Duodecimalmass) ist.

41) Ein 2 Pfund schweres cylindrisches Gefäss, dessen Durchmesser im Lichten $1' 2''$ und dessen Tiefe $2'$ (Duodecimalmass) ist, ist ganz mit Wasser angefüllt. In dasselbe wird eine eiserne Kugel, im Durchmesser $8''$, versenkt, so, dass das, durch die Kugel verdrängte Wasser überfließt. Wie schwer wiegt nun das Ganze nach bayer. Gewichte, wenn ein bayer. Cubicfuss Wasser $44,37$ bayer. Pfunde und die Dichte obigen Eisens $7,113$ ist?

42) In welchem Verhältnisse stehen die Oberflächen der 25 und 80pfündigen Kugel von derselben Masse, die Oberfläche der ersteren als Einheit angenommen?

33) Es soll eine Pyramide durch zwei, zur Grundfläche parallele, Ebenen in drei gleiche Theile getheilt werden. In welchem Verhältnisse stehen die drei zu den Theilen gehörigen Stücke einer Seitenkante?

44) Es sei $a [= 1' 3'']$ ein Schenkel, $b [= 8'']$ die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes; man suche den Radius, des darum beschriebenen Kreises.

45) In ein Quadrat, dessen Seite $a [= 2']$ ist, soll ein kleineres $n [= \frac{2}{3}]$ Mal so grosses so construirt werden, dass die vier Ecken des letzteren in die vier Seiten des ersteren fallen; wie gross ist der Abstand je zweier Ecken dieser Quadrate? Wie findet man diesen Abstand durch Construction aus der Seite a ?

Aufl. Denkt man sich dieses Quadrat in dem gegebenen schon eingeschrieben, so findet man, dass die Differenz des letzteren und jenes gesuchten Quadrates, gleich vier congruenten rechtwinkligen Dreiecken ist, wovon in einem jeden die Summe der Katheten der Seite a des gegebenen Quadrates gleich sein muss. Nennt man daher x die eine Kathete eines solchen Dreieckes, so muss die andere $a - x$ sein, und diese Linien x und $a - x$ geben zugleich die gesuchten Abstände. Es ist nun nach Angabe:

$$a^2 - 2(a - x)x = na^2$$

worin n nothwendig ein ächter Bruch sein muss; daher

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \sqrt{2n - 1} \text{ der Abstand zweier}$$

$$\text{und } a - x = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \sqrt{2n - 1} \text{ der Ab-}$$

stand der beiden anderen Ecken beider Quadrate. Diese Ausdrücke können auch leicht construirt werden, sobald für n ein Zahlenwerth angegeben ist. Construirt man übrigens die

Seite des Quadrates $\frac{1 - n}{2} a^2$, so erscheint

diese als mittlere geometrische Proportionale zwischen x und $a - x$, und es können sohin

diese Linien auch unmittelbar leicht construirt werden. — Ausserdem ersieht man aus dem

für x und $a - x$ erhaltenen Ausdrücken, dass die Aufgabe nur dann gelöst werden kann,

wenn $2n > 1$

also $n > \frac{1}{2}$

ist. Der Werth von n muss also immer zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegen, d. h. grösser als $\frac{1}{2}$ und kleiner als 1 sein. —

46) Man soll ein Dreieck durch Construction, parallel zur Grundlinie, in fünf gleiche Theile theilen.

47) Man suche einen Schenkel des gleichschenkligen Dreieckes, dessen Grundlinie $b [= 5' 2'']$ ist, wenn der Radius des darin beschriebenen Kreises $r [= 8'' 4''']$ misst.

48) Man soll den Inhalt des Raumes finden, den ein innwendig nach verschiedenen Formen ausgearbeitetes Gefäss in sich fasst. Mit destilirtem Wasser angefüllt erhält dieses Gefäss einen Gewichtszuwachs von 99 bayer. Pfunden. Es ist bekannt, dass ein bayer. Cubicfuss destilirten Wassers 44,37 bayer. Pfund wiegt.

49) Eine aus Gusseisen künstlich ausgearbeitete Figur wird in ein cylindrisches, zum Theil mit Wasser gefülltes Gefäss, dessen Durchmesser im Lichten $3' 4'' 8'''$ (Duodecimalmass) hält, so versenkt, dass sie ganz unter Wasser steht. Wie gross ist der körperliche Inhalt dieser Figur, und wie schwer wiegt dieselbe, wenn durch das Einsenken der Wasserspiegel um $2' 11'''$ erhöht wurde, und bekannt ist, dass 1^c Wasser 44,37 Pf. wiegt, und das Gusseisen $7\frac{1}{2}$ Mal so viel wiegt, als ein gleiches Volumen Wasser.

50) In welchem Verhältnisse stehen die körperlichen Inhalte, so wie die Oberflächen, des Tetraëders und des Octaëders um dieselbe Kugel?

51) Man soll einen Cylinder so durch eine Kugel schieben, dass ihre Axen zusammen fallen. Der Cylind-

der soll $\frac{m}{n}$ der Kugel mit der Kugel gemein haben; wie gross ist sein Durchmesser, wenn $r [= 1^\circ 11'']$ Duodecimalmass] der Radius der Kugel ist?

52) Die Höhe einer Kugelzone ist h , der Radius der obern Kreisfläche r , der der untern R ; man suche die Ergänzungshöhe bis zum Pole und den Radius der Kugel.

53) Die drei Seiten eines Dreieckes sind a , b und c ; man soll den körperlichen Inhalt des Doppelkegels finden, welcher durch die Umdrehung des Dreieckes um die Seite b entsteht.

54) In einem Trapeze sind die Winkel an der Grundlinie jeder 45° , die drei Seiten (die Grundlinie nicht gerechnet) sind gleich gross, der Inhalt des Trapezes ist $a [= 2^\square 110^\square$ Duodecimalmass]; man soll jede Seite dieser Figur finden.

55) Man soll aus $M [= 8]$ Pfund Eisen, dessen Dichte $m = 7,2$ ist, eine hohle Kugel so verfertigen, dass sie, in Wasser gelegt, sich nur bis zur Hälfte einsenke. Wie gross muss ihr äusserer Durchmesser D und wie gross der d der Höhlung genommen werden, wenn ein Cubicfuss Wasser 44,37 Pfund wiegt? [Die beiden Durchmesser sind im Duodecimalmasse auszudrücken].

Anmerk. Soll allgemein ein Körper vom Inhalte V in Wasser gebracht, nur bis zu $\frac{1}{n}V$ einsinken, so

muss eine Wassermenge vom Volumen $= \frac{V}{n}$

dem Gewichte des ganzen Körpers gleich sein.

Es muss daher

$$\frac{V}{n} \cdot p = M$$

sein, worin p wie früher das Gewicht derselben Volumeneinheit Wasser bedeutet, auf welche V bezogen ist. Hieraus ergibt sich nun das äussere Volumen des einzusenkenen Körpers

$$V = \frac{n M}{p} \quad (I.)$$

Das Volumen der Höhlung sei nun v , so muss

$$(V - v) sp = M$$

sein, worin s die Dichte der Substanz bedeutet, aus welcher der Körper besteht, daher

$$\left(\frac{n M}{p} - v \right) sp = M$$

sohin

$$v = \frac{ns - 1}{ps} M \quad (II.)$$

Für die in der vorstehenden Aufgabe gesuchten Kugeldurchmesser findet man daher

$$D = \sqrt[3]{\frac{6 n M}{\pi p}}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{6 (s n - 1)}{\pi s p} M} \text{ und}$$

$$D - d = \sqrt[3]{\frac{6 M}{\pi p} \left[1 - \sqrt[3]{\frac{s n - 1}{s}} \right]}$$

die Wanddicke dieser Kugel, wobei $n = 2$ zu setzen ist. —

56) Die drei Seiten eines Dreieckes sind $a = 33'$, $b = 50'$ und $c = 60'$; man suche die gerade Linie,

von der Mitte der Seite a nach der gegenüberstehen den Winkelspitze gezogen.

57) In ein gleichseitiges Dreieck, mit der Seite $a = 5'' 3'''$, soll ein, an Fläche halb so grosses, ebenfalls gleichseitiges Dreieck so construirt werden, dass die drei Winkelspitzen des letzteren in die drei Seiten des erstern fallen. Wie weit fallen die Ecken dieser beiden Dreiecke auseinander, und wie gross ist die Seite des kleineren Dreieckes? Man construire auch beide Dreiecke.

Denkt man sich das zu suchende Dreieck in dem gegebenen schon eingeschrieben, so wird man leicht finden, dass die drei übrigen Dreiecke, von welchen jedes mit dem gesuchten eine Seite gemein hat, und in welchen die zwei anderen Seiten x und y so gross sind, als die Entfernungen der Ecken beider Dreiecke, congruent sein müssen. Wenn daher ein solches Dreieck mit δ , das gesuchte mit D und das gegebene mit $\triangle$ bezeichnet wird, so hat man

$$D = \frac{1}{2} \triangle$$

$$\text{also } \delta = \frac{1}{6} \triangle \quad (1)$$

$$\text{Nun ist } \delta : \triangle = xy : a^2$$

$$\text{also } 1 : 6 = xy : a^2, \text{ und da } x + y = a$$

$$1 : 6 = x(a - x) : a^2$$

$$\text{und } (a - x)x = \frac{a^2}{6}$$

$$\text{oder } (a - x)x = a \cdot \frac{a}{6}$$

wodurch x sowohl durch Rechnung als auch durch Construction leicht zu bestimmen ist. —

58) Die Oberfläche eines geraden Kegels beträgt $33\text{'} } 50\text{''}$ Duodecimalmass. Der Diameter der Grundfläche verhält sich zur Höhe wie $5 : 9$, wie gross ist der Diameter, die Höhe, die krumme Seitenfläche, die Grundfläche und der körperliche Inhalt dieses Kegels?

59) Der Radius eines Kreises misst $8\text{' } 5\text{'}$, wie gross ist die Seite des ihm an Fläche gleichen gleichseitigen Dreieckes?

60) Im $\triangle ABC$ ist von der Spitze A auf die Grundlinie $BC = 9\text{'}$, die Höhe AD gefällt und $BD = 1\text{'}$; wie weit von C entfernt liegt der Punkt, in welchem auf BC die Senkrechte errichtet werden muss, welche die Fläche des ganzen Dreieckes halbirt?

61) Jemand ist 161 Pfund schwer, er hängt sich 8 Pfund Kork an; wie viel Gewicht bleibt ihm zum Schwimmen, wenn die Dichte des menschlichen Körpers 1,012 und das des Korkes 0,24 ist?

Ist allgemein P das Gewicht eines Körpers von der Dichte S, der dadurch zum Schwimmen gebracht werden soll, dass ihm ein Stück einer Substanz $= q$ von der Dichte s angehängt wird, die leichter als Wasser ist, und soll dabei der Auftrieb die Kraft nämlich, mittelst welcher der Körper auf der Oberfläche des Wassers erhalten wird, gleich A in Pfunden sein, so kann man, um eine dieser Grössen zu suchen, wenn die übrigen bekannt sind, die nachfolgende Gleichung benützen.

Es ist

$$\frac{P}{S} = V \text{ das Volumen des Körpers,}$$

$\frac{q}{s \cdot P} = v$ das Volumen der anzuhängenden Substanz, daher

$(V + v) p = \left(\frac{P}{s} + \frac{q}{p} \right) p = \frac{P}{s} + \frac{q}{s}$ das Gewicht des mit der schwimmenden Masse gleichen Volumen Wassers. Es muss daher

$P + q + A = \frac{P}{s} + \frac{q}{s}$
oder

$$(S - 1) P - (1 - s) p + A S s = 0.$$

Aus dieser Gleichung, in welcher $S > 1$ und $s < 1$ nach Voraussetzung sein muss, kann man, wenn von den Grössen P , q und A zwei gegeben sind, die dritte sehr leicht bestimmen. Immer werden hiebei S und s als bekannt angenommen.

62) Der Diameter einer 3pfündigen Kugel ist $2'' 7'''$ Duodecimalmass, wie schwer ist eine Kugel aus derselben Masse, wenn ihr Diameter $1' 2''$ misst?

63) Man soll in ein gleichseitiges Dreieck ein Quadrat so construiren, dass eine Quadratseite mit einer Seite des Dreieckes zusammenfällt, und die beiden andern Seiten des Dreieckes durch zwei Ecken des Quadrates gehen. Wie gross ist die Seite des Quadrates, wenn die des Dreieckes $a = 7' 4''$ ist?

Anmerk. Ist ABC irgend ein Dreieck, in welchem ein Quadrat so beschrieben werden soll, dass zwei Ecken desselben auf einer Seite AC und die beiden anderen in den Seiten AB und BC liegen; so ziehe man die zu AC gehörige Höhe des Dreieckes, beschreibe über diese ein Qua-

drat, und ziehe von dem ausserhalb der Seiten des Dreieckes liegenden Scheitel dieses Quadrates nach dem gegenüberliegenden Scheitel A des Dreieckes eine Gerade, so wird diese die Seite BC in einem bestimmten Punkte schneiden. Von diesem auf die Grundlinie AC des Dreieckes eine Senkrechte gezogen, so wird diese eine Seite und die Endpunkte derselben werden zwei Ecken des gesuchten Quadrates sein. Die Construction des Quadrates selbst und der Beweis dieser Lösung sind leicht. —

64) Wie gross ist die Seite des Quadrates, wenn in der vorhergehenden Aufgabe das Dreieck ein gleichschenkliges ist, dessen Grundlinie $a = 5' 8''$ und Schenkel $b = 6'$ ist, und die Grundlinie mit der Quadratseite zusammenfallen soll?

65) Man soll eine hohle eiserne, ein Pfund schwere, Kugel verfertigen, welche in Wasser gesenkt, in demselben schweben bleibt, wie gross ist der äussere Durchmesser und wie gross die Eisenstärke dieser Kugel zu nehmen, wenn die Dichte des Eisens 7,4 ist? [Man sehe Aufgabe Nro. 55., setze dort $n = 1$]. —

66) Man suche die Seite eines gleichseitigen Dreieckes, welches so in ein Quadrat, mit der Seite $a = 7' 3''$, construirt werden soll, dass die 3 Ecken des Dreieckes in den Umfang des Quadrates fallen.

Anmerk. Sollen die drei Ecken des Dreieckes in den Umfang des Quadrates fallen, so muss ein Eck des letzteren mit einem Scheitel des ersteren zusammenfallen. Denkt man sich daher das

gesuchte Dreieck schon eingeschrieben, so findet man leicht, dass die zwei rechtwinkligen Dreiecke im Quadrate, von welchen jedes eine Seite des gesuchten Dreieckes als Hypotenuse und eine Quadratseite als Kathete hat, congruent sein müssen. Es bilden also die zwei Seiten des gesuchten Dreieckes, welche in einem Ecke des Quadrates zusammenstossen, mit den anliegenden Quadratseiten, gleiche Winkel, von denen jeder sohin $= 15^\circ$ sein muss. Hieraus ergibt sich ein einfacher Weg, um dieses Dreieck zu construiren und zu berechnen. —

67) Man soll in ein reguläres Dreieck ein Quadrat so construiren, dass eine Ecke des Quadrats in die Mitte einer Seite des Dreieckes fällt, und die zwei nächsten Ecken des Quadrats die beiden andern Seiten des Dreieckes berühren.

68) Man soll einem 60 bayerische Pfund schweren Stücke Kupfer so viel Kork anhängen, dass beide, in Wasser gesenkt, mit diesem ganz ins Gleichgewicht kommen. Ein pariser Cubikfuss Kupfer wiegt 600 pariser Pfund und ein solcher Cubikfuss Kork 16 Pfund $25\frac{3}{5}$ Loth, dann 1^{re} Wasser 70 pariser Pfund. Wie viele bayer. Pfunde Kork muss man obigem Kupfer anhängen, wenn 100 bayer. Pfund 114,66 pariser Pfund geben? [Man s. Aufg. Nro. 61.]

69) Es sei von einem abgekürzten Kegel, dessen obere Grundfläche den Radius $r = 4' 8''$, untere Grundfläche $R = 7' 9''$ hat, und dessen Höhe $h = 14'$ ist, durch einen zur Grundfläche parallelen Durchschnitt, ein Stück so abzuschneiden, dass der untere

Theil sich zum ganzen verhalte wie $m : n$ oder wie $3 : 5$. Wie gross muss der Radius des Durchschnitte und wie gross die Höhe des untern Theiles werden?

70) Die krumme Oberfläche eines Kegels bildet einen Quadranten, dessen Fläche $55 \square' 44 \square'''$ Duodecimalmass ist; wie gross ist der körperliche Inhalt des Kegels?

71) Was kostet eine 25' lange bleierne Röhre, deren Durchmesser im Lichten 4" und Metallstärke 7" misst, wenn 1^c Blei 795 Pfund wiegt, und das Pfund Blei 11 kr. kostet?

72) Von einem Würfel, dessen Seite $a = 3' 2''$ ist, werden die Ecken so abgeschnitten, dass der dadurch entstandene Körper von 6 regulären Achtecken und 8 gleichen Dreiecken begrenzt wird. Man suche den körperlichen Inhalt und die Oberfläche dieses Körpers.

73) Man soll in einem Kreise, dessen Radius $R = 7'' 2'''$ ist, drei kleinere unter sich gleich grosse Kreise so beschreiben, dass sie sich unter sich und den grossen berühren; wie gross ist der Radius eines solchen kleineren Kreises, und in welchem Verhältnisse stehen überhaupt die Radien und die Flächen dieser Kreise? Man suche durch Construction den kleineren Radius und zeichne die ganze Figur mit vollster Genauigkeit.

Anmerkungen. Diese Aufgabe, sowie die drei folgenden lassen sich mit Anwendung nachstehender Aufgaben leicht auflösen.

Diese Aufgaben sind:

1) Ein Winkel ist gegeben, dessen Schenkel

gleich lang und bekannt sind; man soll zwischen diesen eine Gerade ziehen, welche so gross ist, als die von den Schenkeln abgeschnittenen Theile zusammen genommen.

2) Man soll die Schenkel dieses Winkels um gleich viel so weit verlängern, dass diese Verlängerungen in Summe so gross werden, als die Verbindungslinie ihrer Endpunkte.

Ad 1. Ist ABC der gegebene Winkel, so trage man von A aus auf AB eine Linie Aa , und von C aus auf BC die Linie $Cb = Aa$, ziehe ab , und trage auf dieser von a aus die Linie $ac = 2 Aa$. Zieht man nun Ac , so schneidet diese den Schenkel BC in einem Punkte der gesuchten Linie. Der andere Endpunkt der letzteren und diese selbst, so wie der Beweis dieses Verfahrens sind leicht zu finden. —

Sollen daher in einem gegebenen Kreise drei, vier, fünf, sechs, acht etc. Kreise eingeschrieben werden, so theile man die Peripherie dieses Kreises in ebenso viele gleiche Theile, und ziehe die zugehörigen Mittelpunctswinkel. Löst man nun für einen dieser Winkel die vorstehende Aufgabe, und trägt die Abschnitte seiner Schenkel auf die Schenkel der übrigen Mittelpunctswinkel in gehöriger Ordnung auf, so erhält man die Mittelpuncte der gesuchten Kreise, welche den gegebenen Kreis und gegenseitig sich berühren. —

Ad. 2. Ein ähnliches Verfahren, wie in 1. kann man anwenden, um die zweite Aufgabe

zu lösen, und um einen gegebenen Kreis drei, vier, fünf, sechs, acht, zehn oder zwölf etc. Kreise zu ziehen, die gegenseitig sich berühren und zugleich Berührende des gegebenen Kreises sind. —

74) Es sollen, unter denselben Umständen (wie 73), 4 kleinere Kreise in den grossen beschrieben werden, wie gross ist der Radius der letztern, und in welchem Verhältnisse stehen überhaupt die Radien und die Flächen dieser Kreise? Man construire auch diese Figur.

75) Der Radius eines Kreises ist $r = 2'' 1'''$, man soll um diesen drei andere gleich grosse so beschreiben, dass sie sich der Ordnung nach unter sich und den ersten berühren, wie gross ist der Radius eines solchen Kreises?

76) Man soll um einen Kreis, dessen Radius $r = 4'''$ ist, vier andere gleich grosse beschreiben, welche den erstern und sich der Ordnung nach berühren. Man suche den Radius eines dieser Kreise.

77) Auf einem kreisrunden Platze soll in der Mitte ein Bassin ausgegraben werden. Die dadurch gewonnene Erde, soll zum Aufschütten des übrigen Theiles des Platzes verwendet werden, und dieser, nachdem die aufgeschüttete Erde wohl zusammengestampft worden, um eben so viel erhöht werden, als der Bassin tiefer wird. Wie gross ist der Radius des Bassin zu nehmen, wenn der des runden Platzes 184' misst?

78) Eine gerade vierseitige Pyramide hat zur Grundfläche ein Quadrat mit der Seite $a = 5''$; wie gross ist eine Seitenkante, wenn bekannt ist, dass die anein-

anderstossenden Seitenflächen der Ordnung nach immer einen Neigungswinkel von 120° bilden?

79) Bei einer geraden achtseitigen Pyramide, die zur Grundfläche ein reguläres Achteck hat, ist eine Seitenkante sechsmal so gross, als eine Kante an der Grundfläche. Wie gross muss jede dieser Kanten werden, wenn der körperliche Inhalt der Pyramide $100'$ betragen soll?

80) In einem hohlen geraden abgekürzten Kegel befindet sich eine Kugel, mit dem Radius $a = 3'' 5'''$, so, dass sie ohne Spielraum an den Boden und an die Seitenwand anliegt. Wenn nun der Diameter der Kugel zugleich auch die Höhe des abgekürzten Kegels, und der Radius der kleineren Grundfläche $r = 2'' 8'''$ ist; so fragt sich, wie gross der Radius der grössern Grundfläche dieses abgekürzten Kegels ist.

81) Der hohle abgekürzte Kegel der vorigen Aufgabe soll um so viel höher werden, dass auf die erste Kugel noch eine zweite grössere ohne Spielraum gelegt werden kann, und die Höhe des ganzen abgekürzten Kegels der Summe der beiden Kugeldurchmesser gleich wird. Wie gross wird der Radius der zweiten Kugel, wie gross die Tiefe des abgekürzten Kegels und wie gross der Radius der grössern Grundfläche desselben?

82) Man soll von einer bleiernen Kugel, mit dem Radius $r = 5''$, ein Segment abschneiden, und daraus einen Würfel giessen, dessen Seite so gross wird, als die Höhe des Segments; wie gross muss letztere genommen werden?

83) Wie schwer sind die 7 gleich grossen Kugeln, welche auf dem Boden eines hohlen Cylinders, in welchen eine 60 pfündige Kugel, von demselben Metalle, genau passt, so liegen, dass in der Mitte eine, und um diese die übrigen 6 ohne Spielraum zu stehen kommen?

84) Es ist bekannt, dass man den körperlichen Inhalt eines jeden Körpers, welcher durch die Bewegung einer ebenen Figur entsteht, dadurch erhält, dass man den Flächeninhalt der bewegten Figur durch den Weg des Schwerpunctes derselben multiplicirt. Man soll nun finden, wohin bei der halben Kreisfläche der Schwerpunct fällt, und wohin beim Quadranten?

85) Ueber der Sehne eines Quadranten, dessen Radius $r = 5''$ misst, wird ein Halbkreis beschrieben; man berechne die Fläche des durch die beiden Bogen begrenzten Stückes.

86) Ein kupferner Cylinder, dessen Durchmesser $d = 8''$ und Höhe $h = 2'$ misst, soll, um ihn im Wasser schwimmen zu machen, mit einem Korkring umgeben werden, dessen Höhe $b = \frac{3}{4}'$ beträgt. Die Dichte des Kupfers sei $n = 8,784$, die des Korkes $q = 0,24$. Wie gross ist der äussere Durchmesser des Korkringes und wie gross die Dicke desselben?

87) Bei einem geraden Kegel verhält sich die Grundfläche zur krummen Seitenfläche wie $2 : 3$; wie viele Grade hält der Bogen des Kreisausschnittes, welcher die krumme Seitenfläche dieses Kegels bildet?

88) Man suche das Flächen - Verhältniss des regu-

lären Sechseckes zum regulären Achtecke um denselben Kreis.

89) Auf dem Boden eines hohlen Cylinders, in welchen eine 80 pfündige Kugel genau passt, liegen 4 unter sich gleich grosse kleinere von derselben Masse ohne Spielraum; wie schwer ist jede der letztern?

90) Man soll aus einer Kugel, deren Radius r $[= 5'']$ ist, $\frac{m}{n}$ $[= \frac{3}{4}]$ ihres körperlichen Inhaltes so herausbohren, dass die dadurch entstandene Höhlung einen Kegel bildet, dessen Spitze in den Pol der Kugel und dessen Axe mit der der Kugel zusammenfällt. Wie gross muss der äussere Radius der Höhlung werden?

91) Wie schwer ist jede der drei Kugeln, welche ohne Spielraum auf dem Boden eines hohlen Cylinders liegen können, wenn in diesen Cylinder genau eine 84 pfündige Kugel von derselben Masse passt?

92) Ober einer, auf einer Ebene liegenden, Kugel, deren Radius $r = 1' 7''$ ist, befindet sich, $7''$ von derselben entfernt, ein leuchtender Punct; wie gross ist der Radius des schattigen Kreises auf der Ebene?

93) Ein abgekürzter Kegel von Blei, dessen oberer Durchmesser $1' 9''$, unterer $2' 4''$ und Höhe $3'$ beträgt, ist cylinderförmig so ausgehöhlt, dass der Diameter der Aushöhlung $1' 5''$ und deren Tiefe $2' 7''$ misst. Dieser ausgehöhlte abgekürzte Kegel wird mit Wasser gefüllt, und es fragt sich, wie schwer alles zusammen wiegt, wenn ein pariser Cubicfuss Blei 794,64

pariser Pfunde wiegt, 1113 bayerische Fuss 1000 pariser Fuss und 100 bayerische 114,66 pariser Pfund geben, dann 1 bayerischer Cubicfuss Wasser 44,37 bayerische Pund wiegt. [Die Dimensionen sind im bayerischen Duodecimalmasse gegeben und das Gewicht des Ganzen ist nach bayerischem Pfund, Loth und Quintel anzugeben.]

94) Man soll den Winkel jenes Bogens finden, dessen Länge dem Radius gleich ist.

95) Eine Rakete erreicht im Steigen eine Höhe von $\frac{1}{4}$ Meile; wie weit vom Platze, wo sie aufstieg, kann sie gesehen werden, die Erde als Kugel betrachtet, deren Aequator 5400 Meilen misst?

96) Ein in Wasser versenkter, 9 Zentner schwerer, eiserner Körper, soll durch zwei gleich grosse mit Luft gefüllte Ballone unter dem Wasser so verbunden werden, dass alles darin schwebe. Angenommen, dass die Ballone selbst aus so feiner Masse gefertigt sind, dass auf das Gewicht und Volumen derselben keine Rücksicht zu nehmen ist; so fragt sich, wie gross ihr Durchmesser zu nehmen sei, wenn die Dichte des Eisens 7,3, die der Luft 0,00123 ist, und 1 Cubicfuss Wasser 44,37 Pfund wiegt.

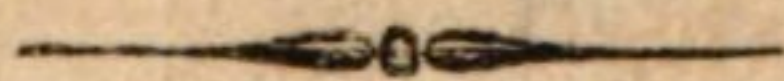
97) Ein Cylinder, dessen Grundfläche den Durchmesser 6'' 8''' Duodecimalmass hat, soll in Form eines abgekürzten Kegels so durchbohrt werden, dass die Höhlung $\frac{2}{3}$ der Masse des Cylinders beträgt, und das Verhältniss der beiden Radien des abgekürzten Kegels wie 3 : 4 ist; wie gross muss jeder derselben genommen werden?

98) Man soll einen Kegel verfertigen, dessen körperlicher Inhalt $a = \frac{1}{8}$ Cubikfuss und der Diameter

der Grundfläche $d = 5''$ werden soll. Wie gross ist die schiefe Seite desselben und wie gross der Winkel des Sectors zu nehmen, welcher das Netz der krummen Seitenfläche dieses Kegels bilden soll?

99) Bei einem abgekürzten Kegel sind die Höhe $h = 5' 3''$, die Radien $R = 2' 1''$, $r = 1' 4'''$ [Duodecimalmass] gegeben; man suche den Centralwinkel, zu welchem der concentrische Ring, als krumme Seitenfläche dieses Kegels, gehört.

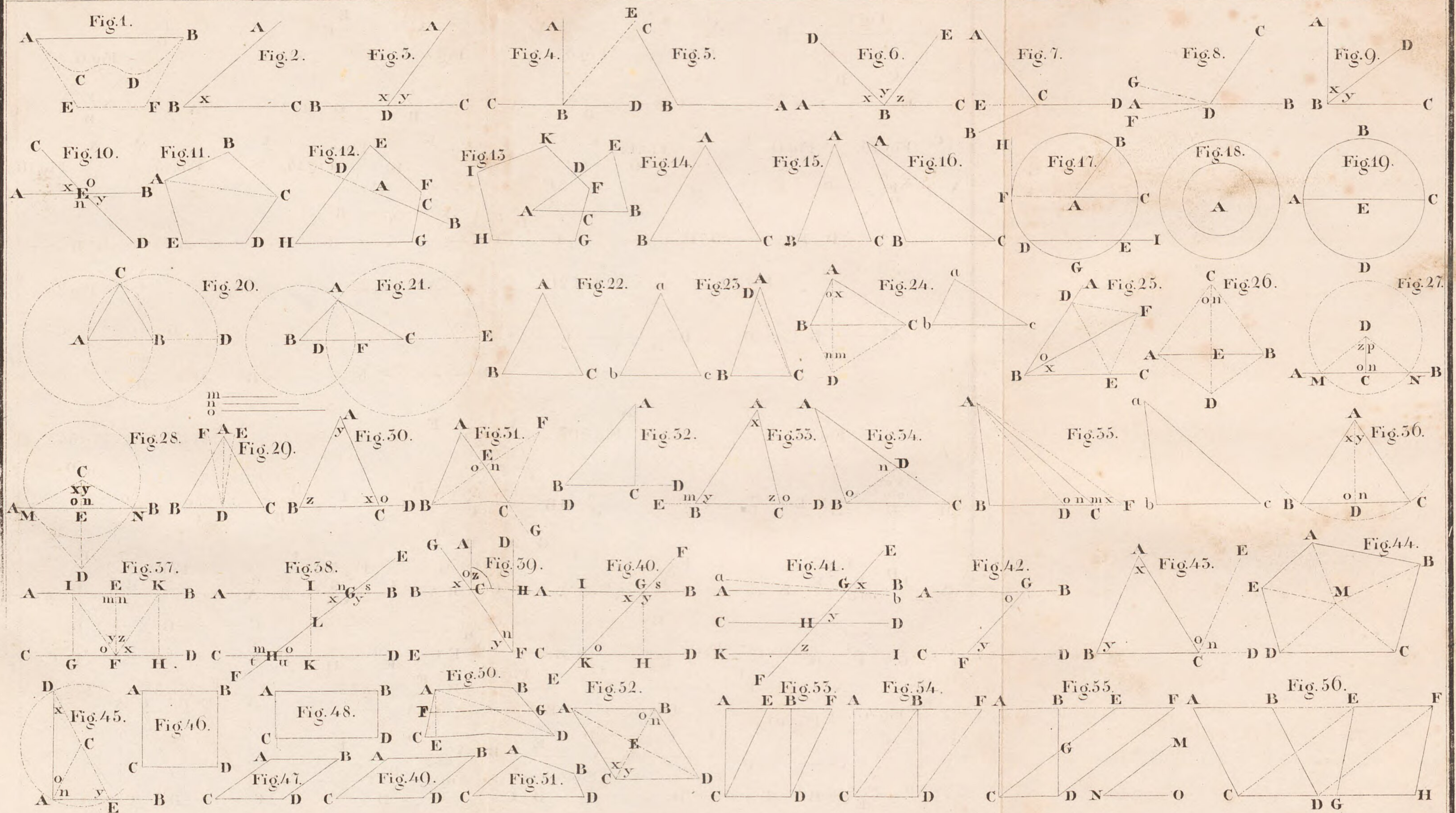
100) Vier sechzigpfündige eiserne Kugeln sollen in sechs andere umgegossen werden, so, dass die ersten drei unter sich gleich und ihr Durchmesser $\frac{2}{3}$ des Durchmessers einer der andern drei Kugeln werde, welche ebenfalls unter sich gleich sein sollen. Wie gross ist der Durchmesser von jeder dieser zwei Kugelgattungen, und wie schwer wiegt jede, wenn 1 c' Wasser 44,37 Pfund wiegt, das Gusseisen $7\frac{1}{2}$ Mal schwerer ist als Wasser, und angenommen wird, dass beim Gusse $1\frac{1}{4}$ Procent verloren gehen?



der Grundfläche $h = 5''$ werden soll. Wie gross ist
 die schiefe Seite desselben und wie gross der Winkel
 des Sectors zu nehmen, welcher das Netz der Krone
 men Seitenfläche dieses Kegels bilden soll?
 99) Bei einem abgestürzten Kegel sind die Höhen
 $h = 30''$, die Radien $R = 20''$, $r = 14''$. [Das
 decimale] gegeben; man suche den Centralwinkel,
 zu welchem der schiefe Ring, als Krone Sei-
 tenfläche dieses Kegels, gehört.
 100) Vier sechzigpündige eiserne Kugeln sollen
 in sechs andere umgegossen werden, so, dass die
 steten drei unter sich gleich und ihr Durchmesser $\frac{2}{3}$
 des Durchmessers einer der andern drei Kugeln werde,
 welche ebenfalls unter sich gleich sein sollen. Wie
 gross ist der Durchmesser von jeder dieser zwei Ku-
 gelgaltungen, und wie schwer wiegt jede, wenn 1^c
 Wasser 44,37 Pfund wiegt, das Guss Eisen $\frac{7}{8}$ Mal schwe-
 rer ist als Wasser, und angenommen wird, dass beim

Guss 14 Procent verloren gehen?

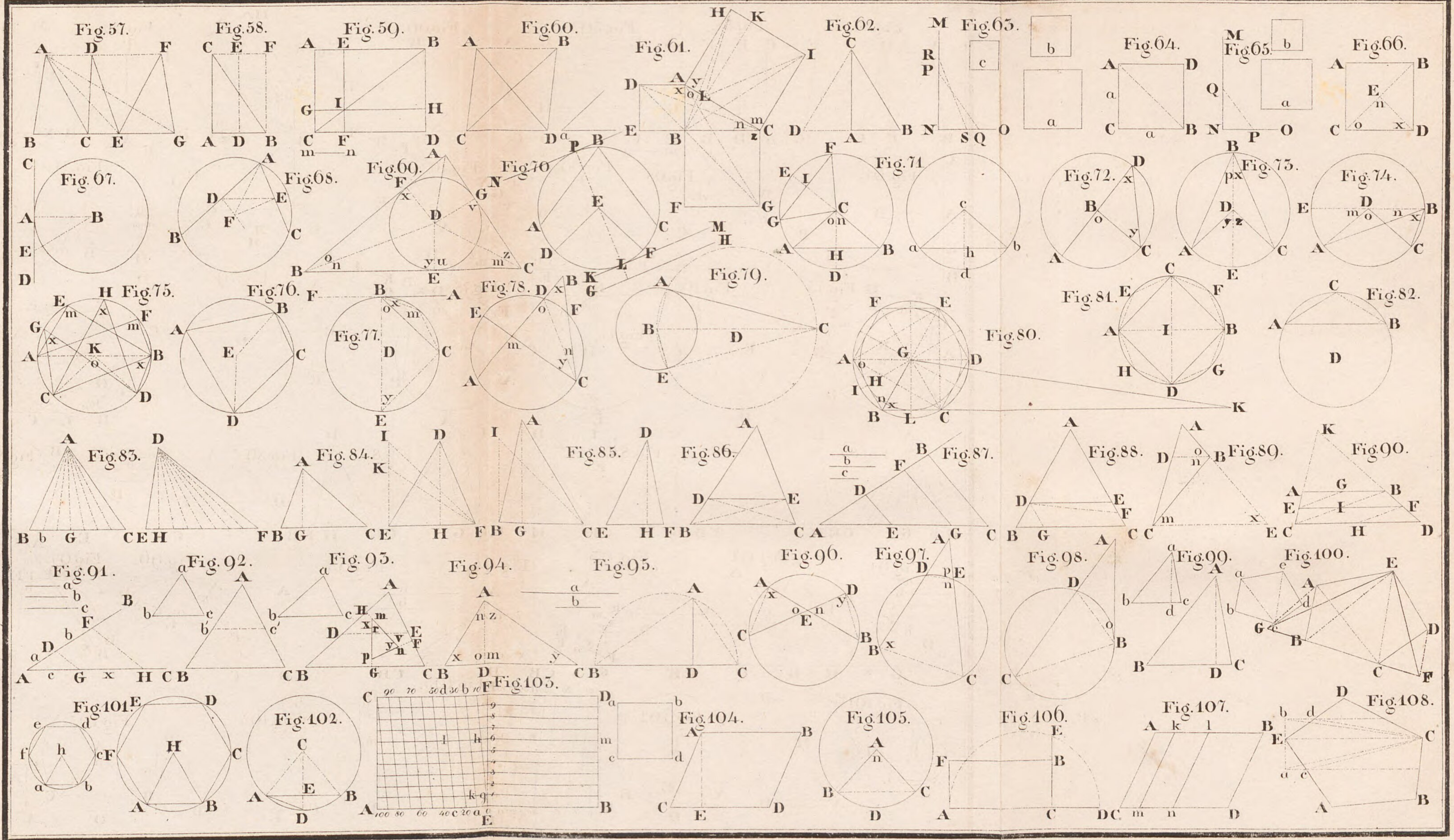
101) Ein Cylinder, dessen Grundfläche D und
 Höhe H ist, hat einen Inhalt von V .
 Wie gross ist der Radius R der Grundfläche?
 102) Ein Cylinder, dessen Grundfläche D und
 Höhe H ist, hat einen Inhalt von V .
 Wie gross ist der Radius R der Grundfläche?



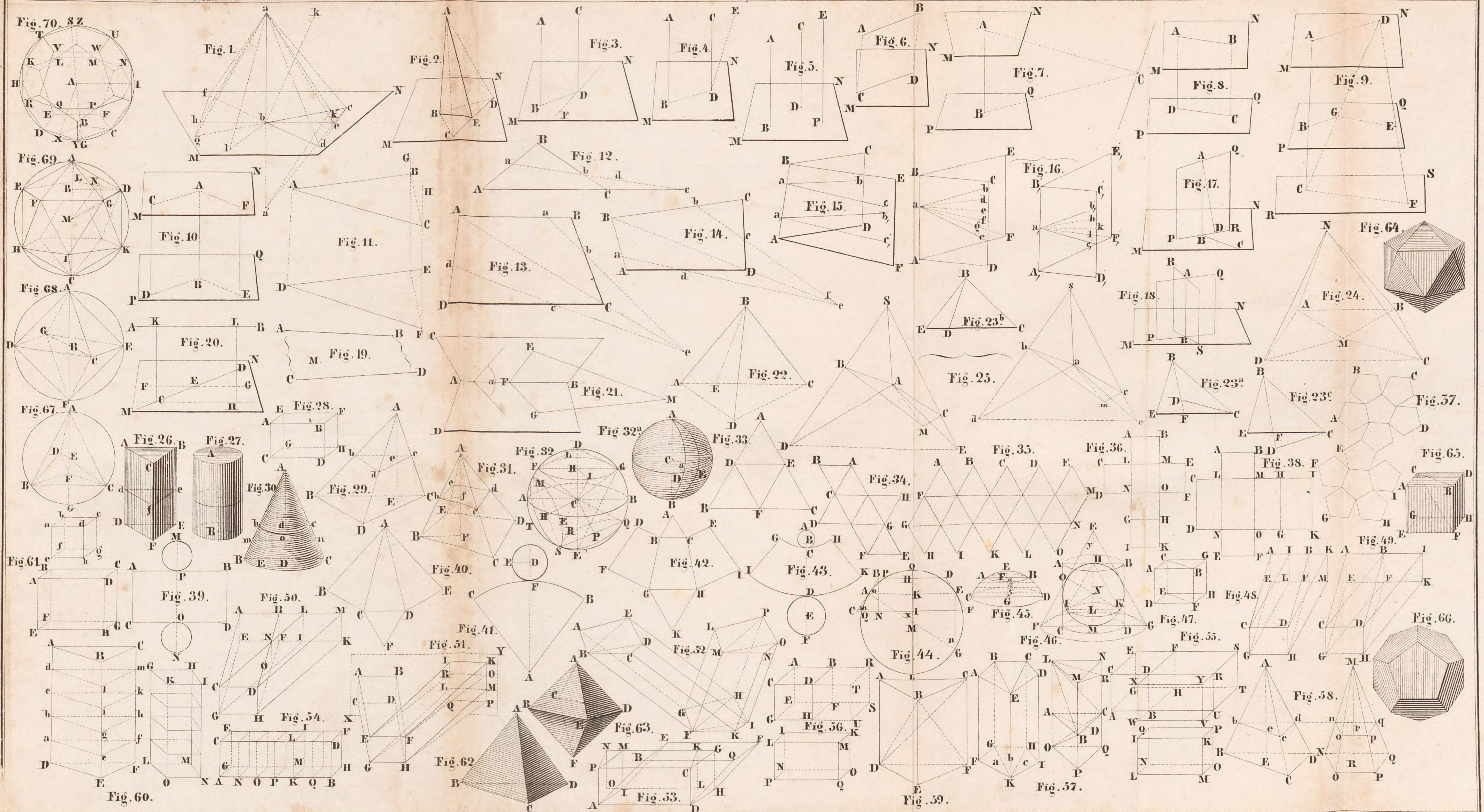
Faint header text at the top of the page, possibly a title or date.

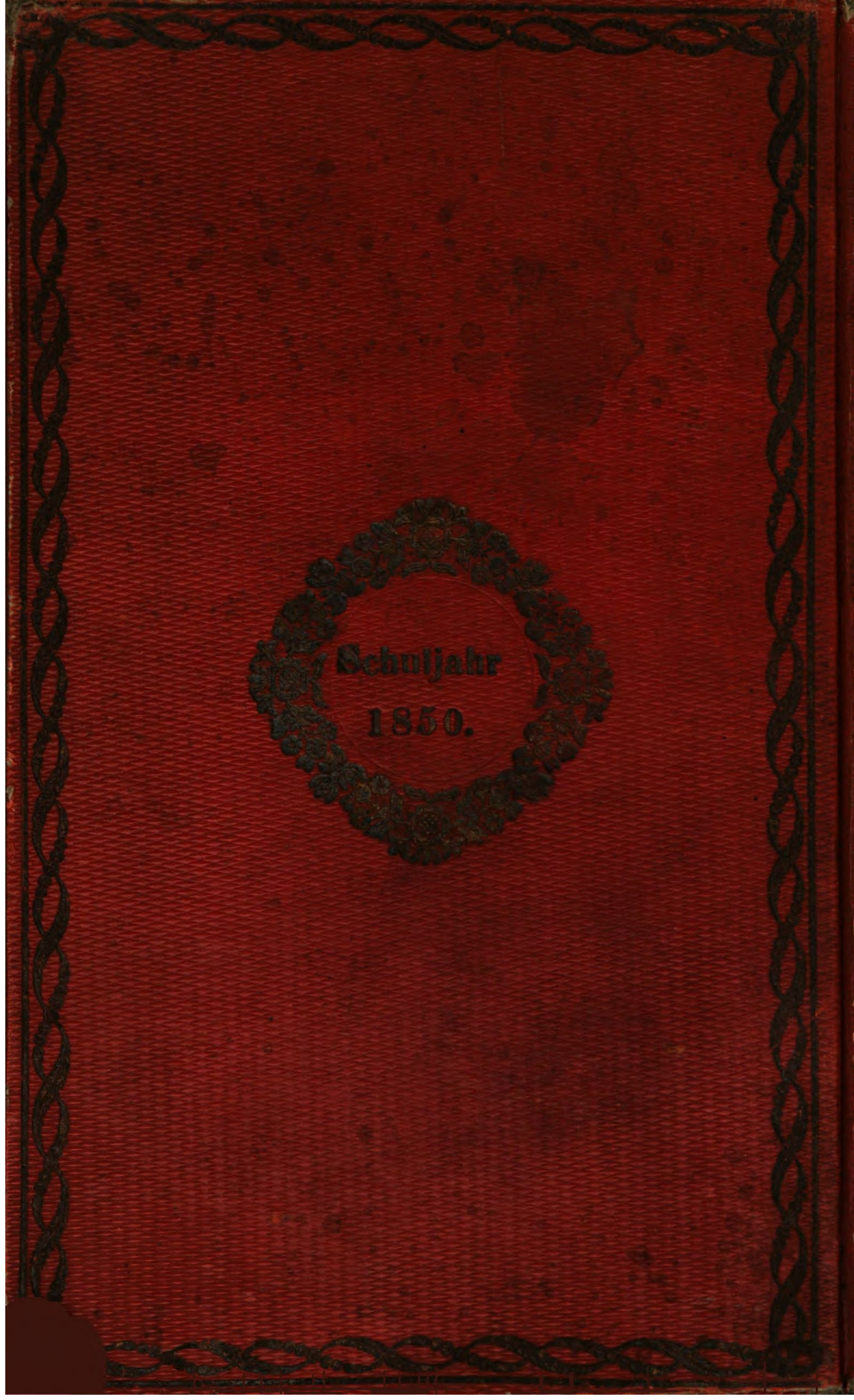
Main body of faint, illegible text, possibly a letter or document, enclosed in a rectangular border.

Faint footer text at the bottom of the page, possibly a signature or date.



Figuren zur Stereometrie.





Schuljahr

1850.

Unruh, Raimund,

Lehrbuch der Geometrie und Trigonometrie nebst ihren ausgedehnten
Anwendungen auf die Lösung geometrischer Probleme vorzügl. für Militär- u.
techn. Lehranst
Bd.: 1/2

Landshut (1850)

Math.p. 742 u-1/2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083332-5